UNIVERSIDAD LABORAL DE ALCALÁ DE HENARES

ESCUELA UNIVERSITARIA DE

INGENIERÍA TÉCNICA DE TELECOMUNICACIÓN

Especialidad: EQUIPOS ELECTRÓNICOS

1972-1975

SISTEMAS REALIMENTADOS DE CONTROL

ANÁLISIS DE BODE

TEMA 7

ANALISIS DE BODE.

- Introducción.
- Escalas de representación.
- Método de analisis de una función de transferencia.
- ANALIS DELAS FUNCIONES ELEMIENTALES:

1. Función $T(s) = K$, $T(j\omega) = K$
2. Funcion $T(s) = S$, $T(j\omega) = j^{\omega}$
3. Idem $T(s) = 1/S$, $T(j\omega) = \frac{1}{j^{\omega}}$
4. ,, $T(s) = S^n$, $T(j\omega) = (j\omega)^n$
5. ,, $T(s) = S^{-n}$, $T(j\omega) = (j\omega)^{-n}$
6. ,, $T(s) = \tau s+1$; $T(j\omega) = (j\omega\tau+1)$
7. ,, $T(s) = \frac{1}{\tau s+1}$; $T(j\omega) = \frac{1}{(j\omega\tau+1)}$
8. ,, $T(s) = (\tau s-1)$; $T(j\omega) = (j\omega\tau-1)$
9. ,, $T(s) = \frac{1}{(s\tau-1)}$; $T(j\omega) = \frac{1}{(j\omega\tau-1)}$
10. ,, $T(s) = as^2+bs+c$

    10.a) para $\delta > 1$

    10.b) para $0 \leq \delta \leq 1$

11. Funcion $T(s) = \frac{1}{as^2+bs+c}$

    11.a) para $\delta > 1$

    11.b) para $0 \leq \delta \leq 1$

TEMA Nº 7

ANALISIS BODE (DE)

INTRODUCCION

El analisis de los sistemas de control por retroalimentacion usando el metodo de Bode, es equivalente al analisis de Nyquist en cuanto a que ambas técnicas emplean representaciones gráficas de $GH(j\omega)$. Sin embargo la técnica de Bode consiste en dos gráficas:

1) La magnitud de $GH(j\omega) \rightarrow |G|$
2) el angulo de fase de $GH(j\omega) \rightarrow \varphi_G$

representadas ambas como funciones de la pulsación (ω).

Una utilidad de la técnica de Bode es que ilustra claramente la estabilidad relativa de un sistema. Los márgenes de ganancia y fase suelen definirse en términos de las representaciones de Bode.

ESCALAS DE REPRESENTACION

Como hemos visto existen dos graficas: $|G|$ y φ_G

- En la representación de $|G|$ se utilizan las escalas:

ordenadas $\rightarrow$ $y = 20 \lg |G|$ (se mide en db)

abcisas $\rightarrow$ $x = \log \omega$ (se mide en décadas)

Puesto que el decibelio (db) es una unidad logaritmica, la magnitud en db de una función de respuesta de frecuencia, compuesta de un producto de términos, es igual a la suma de las magnitudes en (db) de los términos individuales, en caso de ser cociente sera la diferencia de los términos del denominador. Esto simplifica y acelera enormemente las representaciones por Bode de sistemas relativamente complicados.

En la representación de φ_G se utilizan las escalas:

Ordenadas $\rightarrow$ $y = \varphi^\circ$ (medido en grados)

Abcisas $\rightarrow$ $x = \lg \omega$ (medido en décadas)

METODO DE ANALISIS DE UNA FUNCION DE TRANSFERENCIA

Las funciones de transferencia de los sistemas de control, pueden presentarse bajo formas muy diversas. Para ser analizadas, deben ser previamente transformadas a la forma de productos de términos sencillos (irreducibles) que serán analizados por separado, y luego sumados sus resultados aislados, segun hemos dicho ante.

En el estudio que comenzamos a continuación, se analizan una por una estas funciones elementales, que podran

conformar, en conjunto, cualquier otra función más compli- (1)
cada. Por tanto, analizadas estas funciones elementales, habremos realizado un analisis que permitira estudiar cualquier función de transferencia.

Utilizaremos aqui la correspondencia

$$s \longleftrightarrow j\omega$$

ANALISIS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

1. Función $T(s) = K$, $T(j\omega) = K$

- Ganancia: $|G| = |T(j\omega)| = K$

a) $K > 0$ $\quad 20\lg|G| = 20\lg K$

osea: $y = b = 20\lg K$

- Fase: $\varphi_G = 0°$

b) $K < 0$

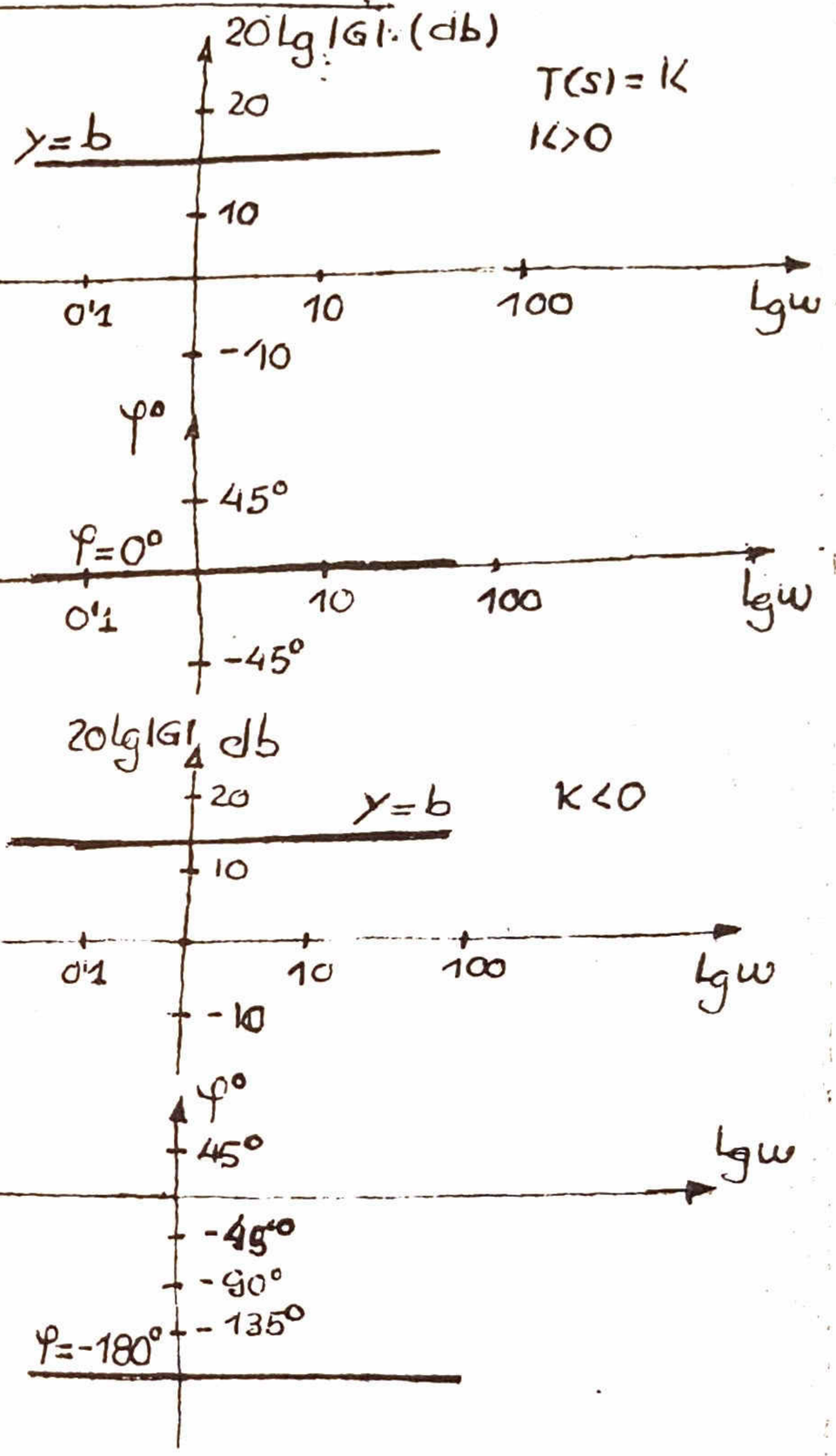
ganancia $\quad |G| = |T(j\omega)| = |K|$

queda: $20\lg|G| = 20\lg|K|$

osea: $y = b = 20\lg|K|$

fase

$\varphi_G^\circ = -180°$



2. Función $T(s) = S \rightarrow T(j\omega) = j\omega$

Ganancia

$$|G| = |T(j\omega)| = \sqrt{\omega^2} = \omega$$

$$20\lg|G| = 20\lg\omega$$

$y = 20x$ (pendiente $20\frac{db}{decada} = m$)

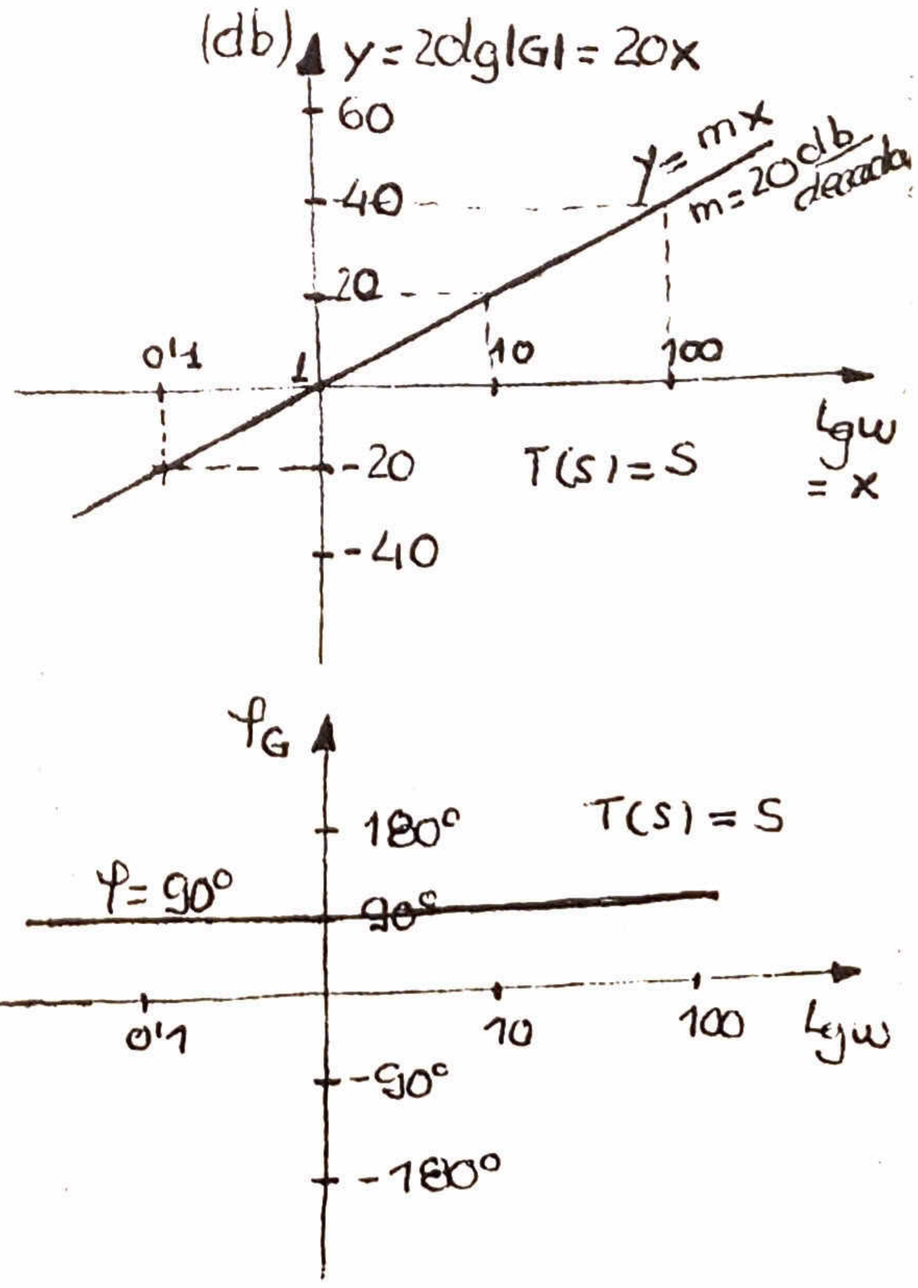
punto de corte con el eje X:

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

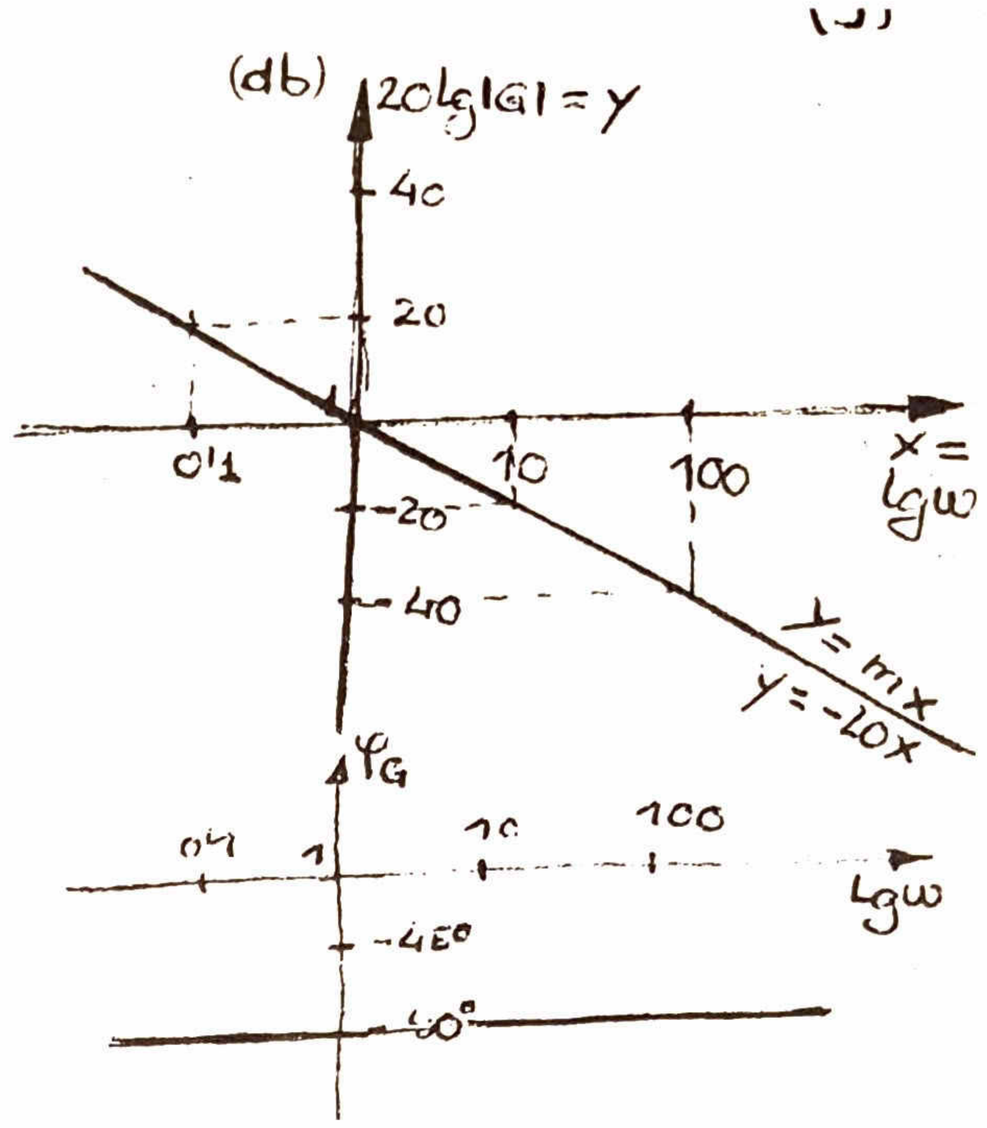
$x = 0 \Rightarrow \lg\omega = 0 \Rightarrow \omega = 1$ } $\omega = 1 \Rightarrow y = 0db$

Fase

$\varphi_G = 90°$



Función $T(s) = 1/s \rightarrow T(j\omega) = 1/j\omega$



Ganancia:

$$|G| = |T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2}} = \frac{1}{\omega}$$

$$\begin{cases} 20\lg|G| = 20\lg\frac{1}{\omega} = 20[\lg(1) - \lg\omega] = -20\lg\omega \\ y = 20\lg|G| = -20x \text{ ; } m = -20 \text{ db/década} \end{cases}$$

si $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \lg\omega = 0 \Rightarrow \omega = 1$

Fase:

$$\varphi_G = -90°$$

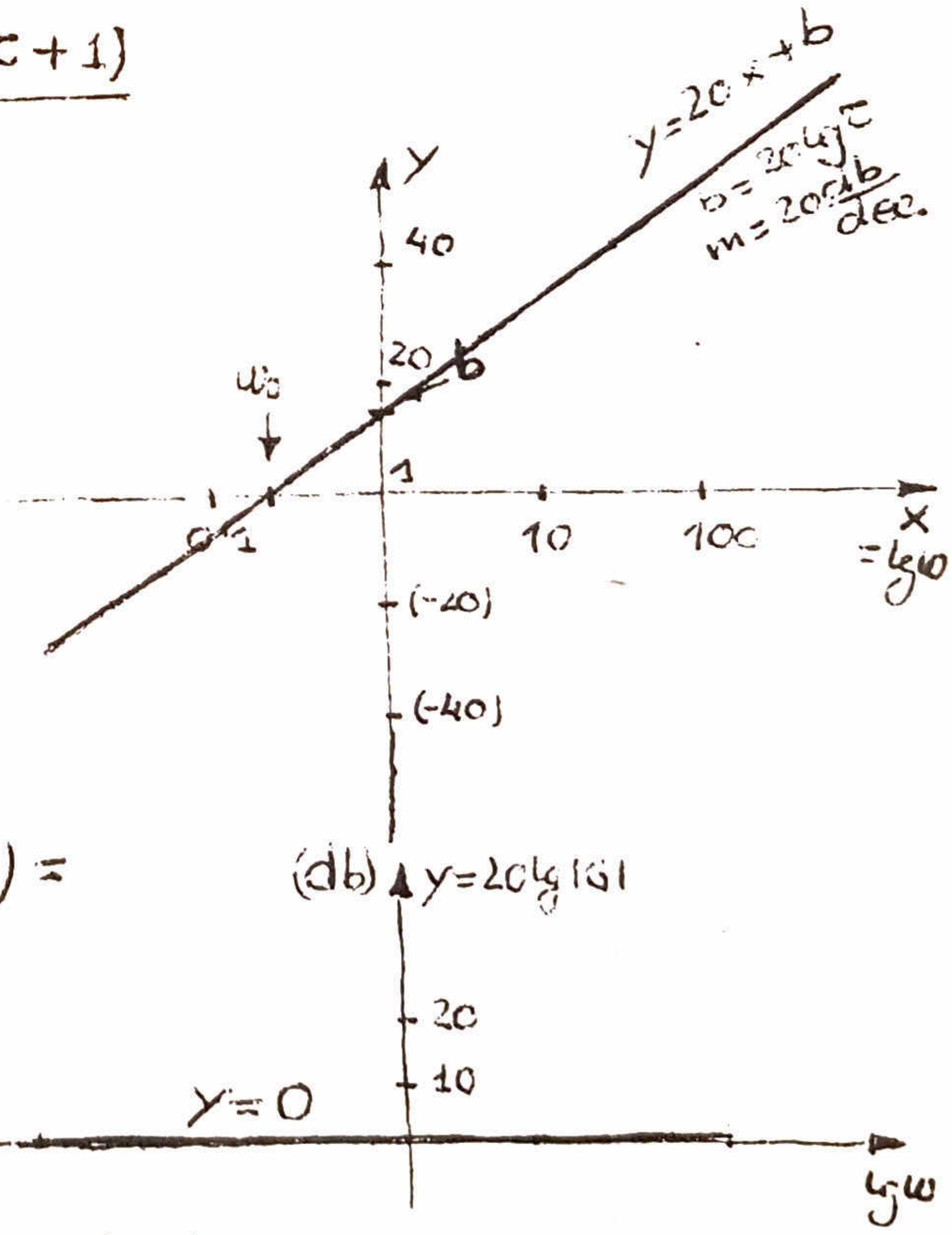
Función $T(s) = s^n \rightarrow T(j\omega) = (j\omega)^n$

Esta función $T(s) = s^n$ será una línea recta que pasará por el origen y de pendiente $m = n \cdot 20$ db/dec. La fase será $\varphi_G = n \cdot 90°$

Función $T(s) = s^{-n} \rightarrow T(j\omega) = (j\omega)^{-n}$

Será una línea recta cuya pendiente será $m = -n \cdot 20 \frac{\text{db}}{\text{década}}$ y la fase $\varphi_G = -n\,90°$.

Función $T(s) = \tau s + 1 \rightarrow T(j\omega) = (j\omega\tau + 1)$



Ganancia:

$$|G| = |T(s)| = |T(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$$

aproximaciones asintóticas:

a) si $\omega \to 0 \Rightarrow |G| \to \sqrt{1^2} = 1$; $(\omega\tau)^2 \ll 1^2$

$$\left.\begin{matrix} 20\lg|G| = 20\lg 1 = 0 \text{ db} \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$$

b) si $\omega \to \infty \Rightarrow (\omega\tau)^2 \to \infty \gg 1^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |G| \simeq \sqrt{(\omega\tau)^2} = (\omega\tau)$$

luego:

$$y = 20\lg|G| = 20\lg\omega\tau = 20(\lg\omega + \lg\tau) =$$

$$= 20\lg\omega + 20\lg\tau$$

haciendo:

$$y = 20x + b \begin{cases} x = \lg\omega \\ b = 20\lg\tau \\ m = 20 \text{ db/dec.} \end{cases}$$

Punto de corte de ambas rectas (ω_0):

$$\left.\begin{matrix} y = 0 \\ y = 20x + b \end{matrix}\right\} \quad 20x + b = 0 \Rightarrow x = -b/20$$

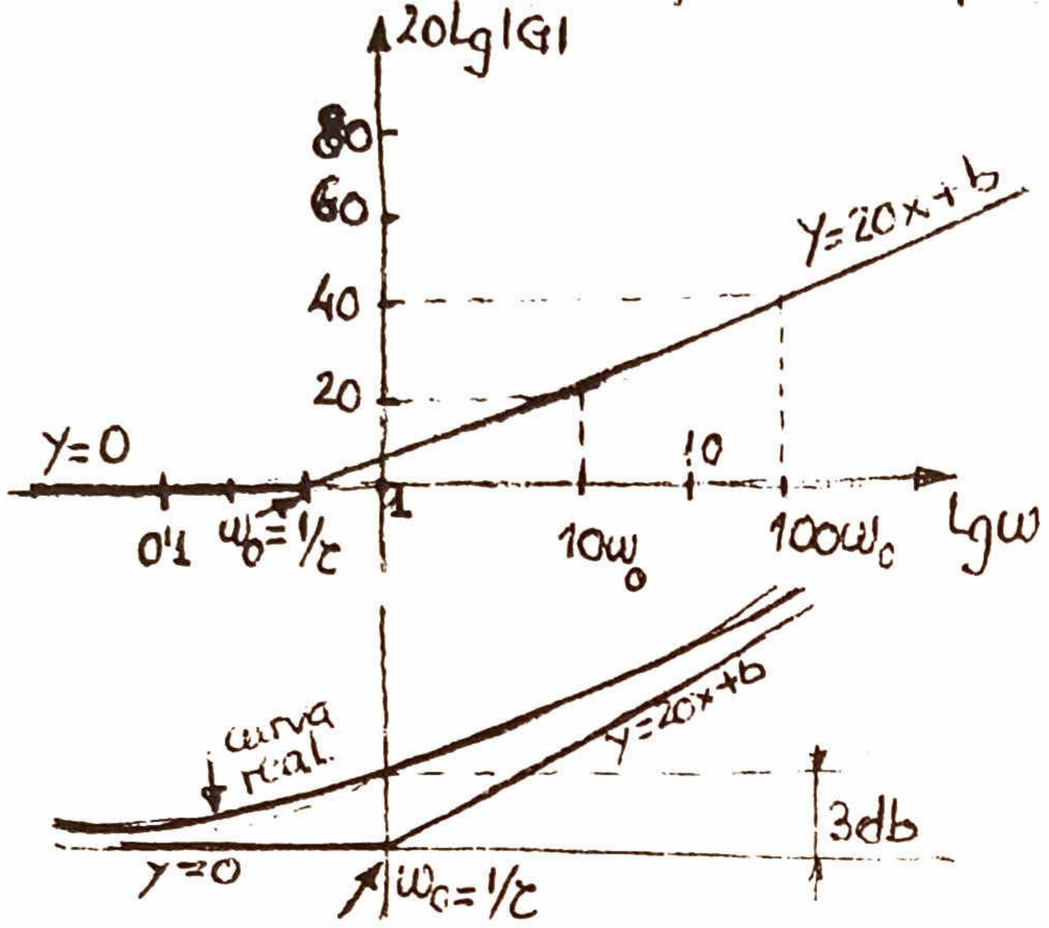
$$20\lg\omega_0 = -20\lg\tau \Rightarrow \lg\omega_0 = -\lg\tau \Rightarrow \lg\omega_0 = \lg\tau^{-1}$$

cuya para: $\boxed{\omega_0 = 1/\tau}$

Entonces: ① para $\omega < \omega_0 = 1/\tau$, actua $y = 0$

② para $\omega > \omega_0 = 1/\tau$, actua $y = 20x + b$

La curva real de $20\lg|G|$ se puede considerar igual a la composición de estas dos rectas, pues se aproxima a ellas. Son sus asintotas.



El punto en donde una se separa de ellas es el codo $\omega = \omega_0$

Veamos cuanto se separa:

$|G|_{\omega_0} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$20\lg|G|_{\omega_0} = 20\lg\sqrt{2} = 10\lg 2 =$

$= 10 \cdot 0'3 = \underline{3db}$

Se separa 3db por encima del codo $\omega = \omega_0$.

Fase

$\varphi_G = \text{arctg}\,\omega\tau$

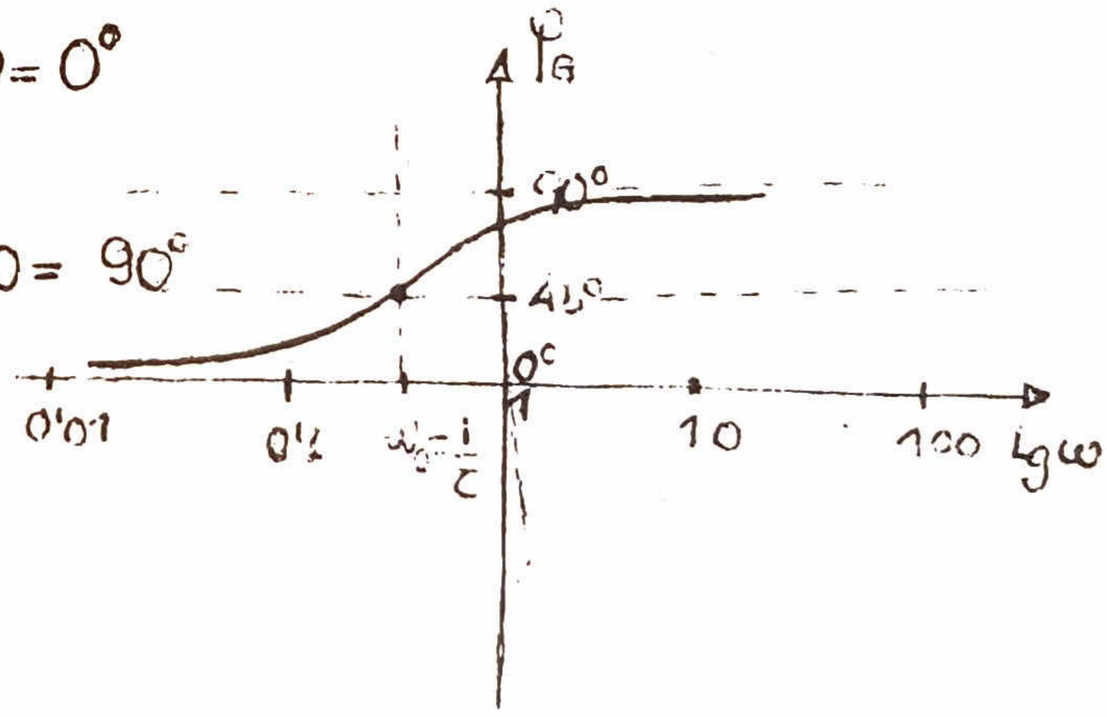
a) si $\omega \to 0 \Rightarrow \omega\tau \to 0 \Rightarrow \text{arctg}\,0 = 0°$

$\varphi_G = 0°$

b) si $\omega \to \infty \Rightarrow (\omega\tau) \to \infty \Rightarrow \text{arctg}\,0 = 90°$

c) $\omega = \omega_0 = 1/\tau$

$\varphi_G = \text{arctg}\,1 = 45°$



Función $T(s) = \dfrac{1}{(s\tau+1)} \rightarrow T(j\omega) = \dfrac{1}{(1+j\omega\tau)}$

Ganancia

$|G| = |T(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$

Aproximaciones asintóticas:

a) si $\omega \to 0$; $(\omega\tau)^2 \to 0 \Rightarrow |G| \simeq 1$

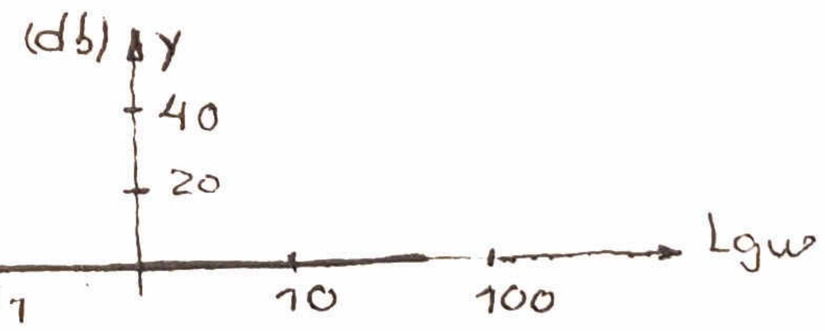
$20\lg|G| = 20\lg 1 = 0db$

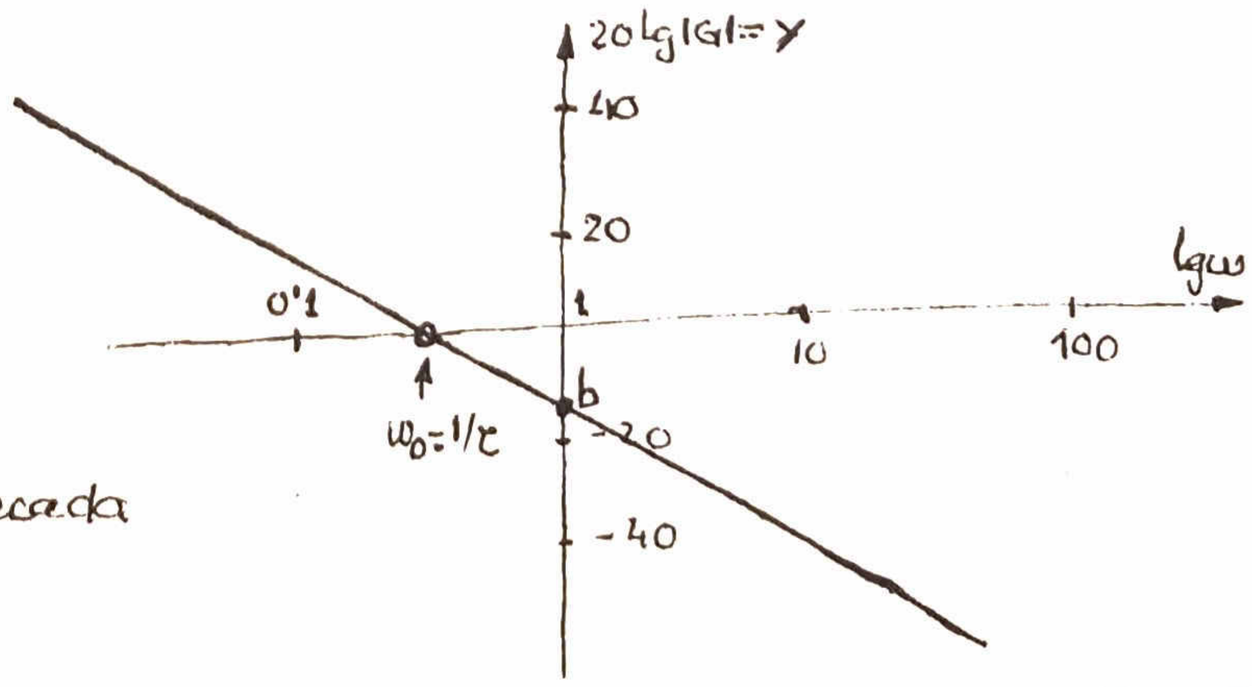
$y = 20\lg|G| = 0$

b) si $\omega \to \infty$; $(\omega\tau)^2 \to \infty \Rightarrow |G| \simeq \dfrac{1}{\omega\tau}$

$20\lg|G| = -20\lg\omega - 20\lg\tau$

osea: $y = -20x - b$ $\begin{cases} m = -20db/década \\ b = 20\lg\tau \end{cases}$





Puntos de corte de ambas rectas --

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=-20x-b \end{array}\right\} \begin{array}{l} -20x-b=0 \\ -20x=b \rightarrow 20x=-b \end{array}$$

$$+20\lg\omega_0 = -20\lg\tau = 20(\lg 1-\lg\tau) = 20\lg\frac{1}{\tau} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 1/\tau}$$

Analisis.

- $\omega < \omega_0 = 1/\tau$ entonces $y=0$
- $\omega > \omega_0 = 1/\tau$ " $y=-20x-b$

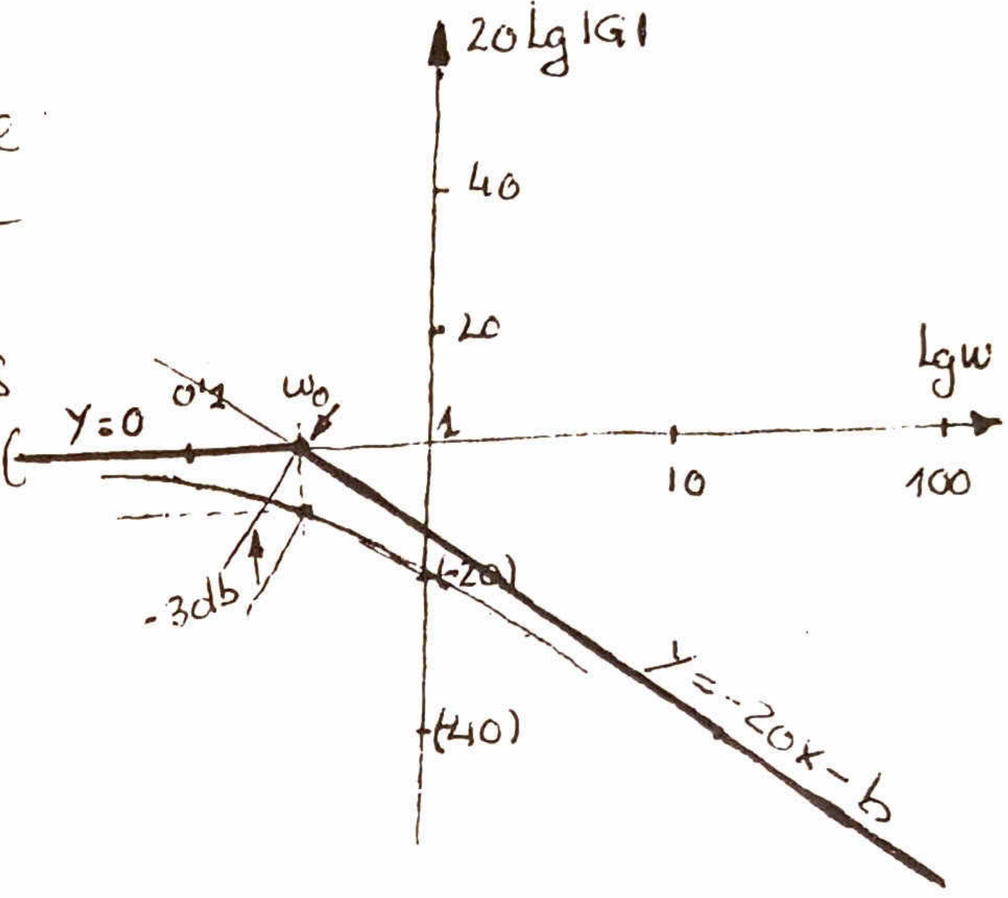
La curva de $20\lg|G|$ se puede considerar formada por la composicion de las rectas anteriores.

El punto donde se separa más las curvas reales y aproximada es para el cado $\omega=\omega_0$:

$$|G|_{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$20\lg|G|_{\omega_0} = -20\lg\sqrt{2} = -10\lg 2 = \underline{-3db}$$

por debajo de ω_0.



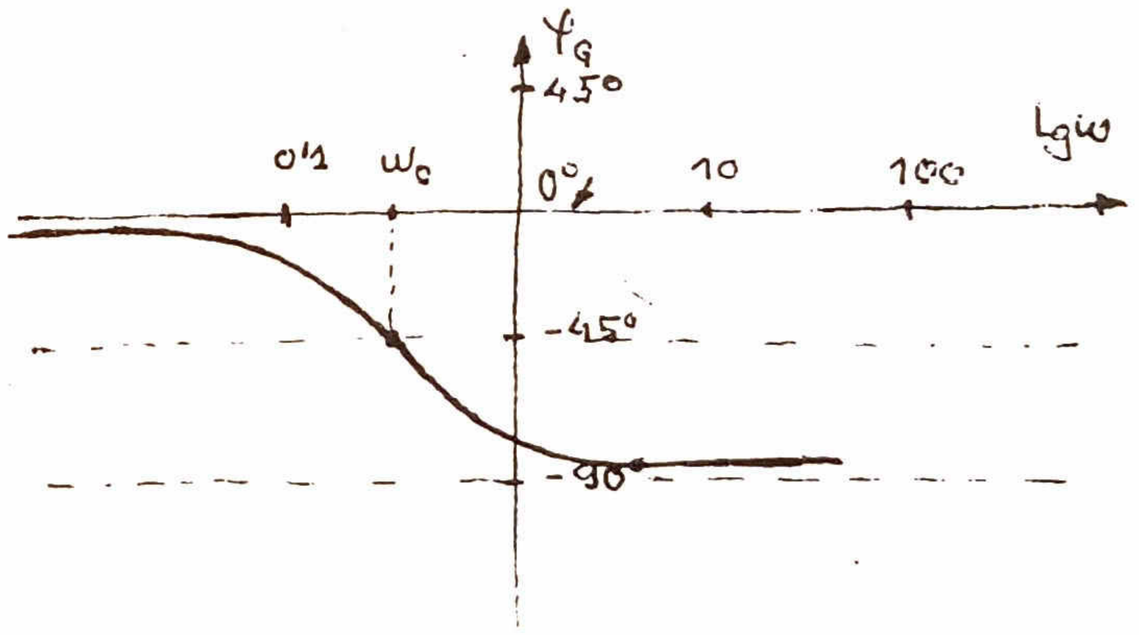
Fase

$$\varphi_G = -\operatorname{arctg}\omega\tau$$

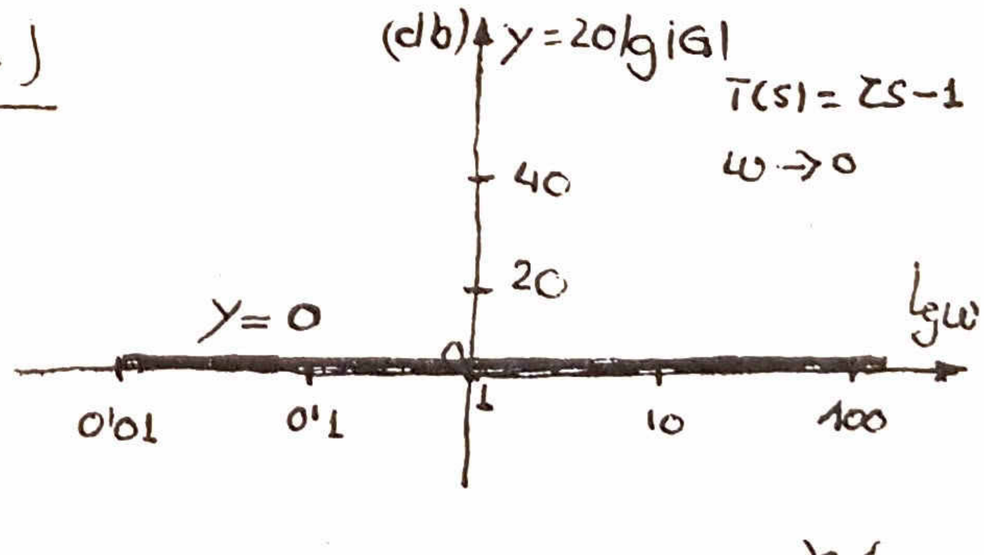
a) $\omega\to 0 \Rightarrow \varphi_G = -\operatorname{arctg} 0 = 0°$

b) $\omega\to\infty \Rightarrow \varphi_G = -\operatorname{arctg}\infty = -90°$

c) $\omega\to\omega_0=1/\tau \quad \varphi_G = -\operatorname{arctg} 1 = -45°$



Funcion $T(s) = (\tau s - 1) \rightarrow T(j\omega) = (j\omega\tau - 1)$



Ganancia..

$$|G| = |T(j\omega)| = \sqrt{(\omega\tau)^2+1^2} = \sqrt{1+(\omega\tau)^2}$$

$$y = 20\lg|G| = 20\lg\sqrt{1+(\omega\tau)^2}$$

a) Si $\omega\to 0 \Rightarrow (\omega\tau)^2\to 0$ por tanto

$$y = 20\lg 1 = 0$$

b) si $\omega\to\infty \Rightarrow (\omega\tau)^2\to\infty$ y $\gg 1$:

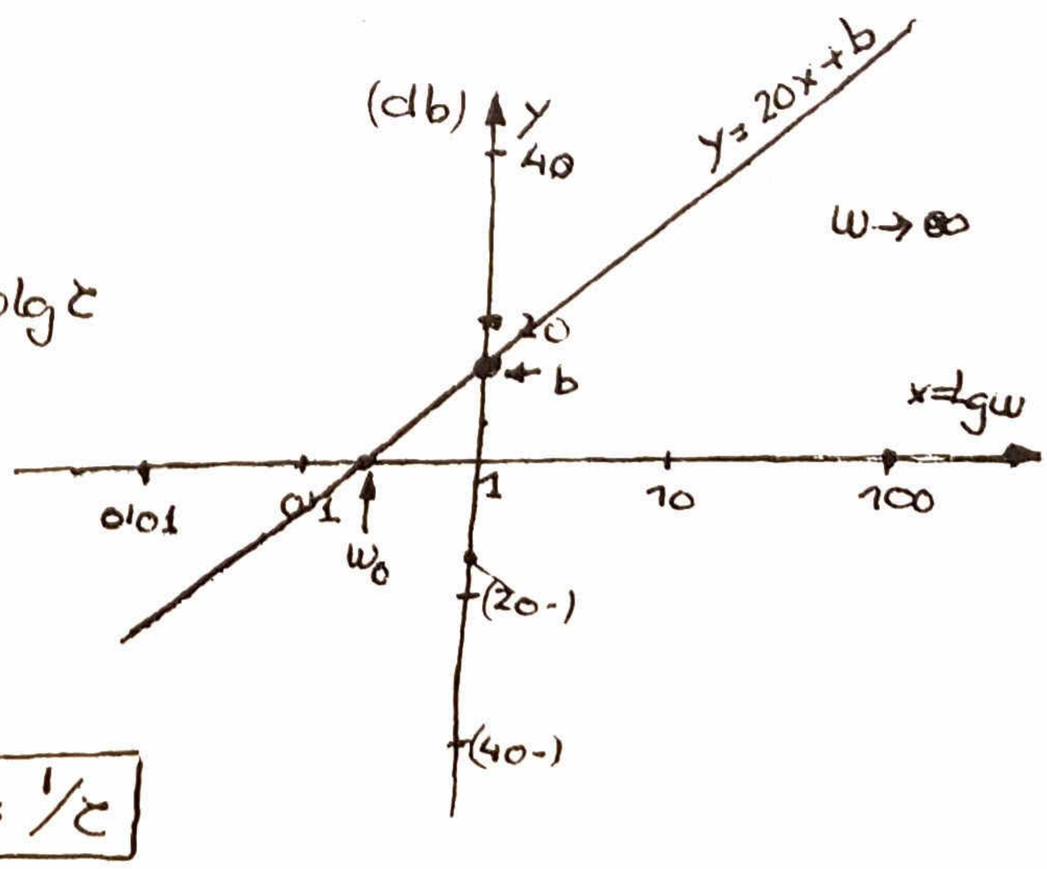
$$y = 20\lg\sqrt{(\omega\tau)^2} = 20\lg\omega\tau = 20\lg\omega + 20\lg\tau$$

$$y = 20x + b \quad \left\{\begin{array}{l} m = 20\ db/dec. \\ x = \lg\omega \\ b = 20\lg\tau \end{array}\right.$$

puntos de corte de ambos rectas --

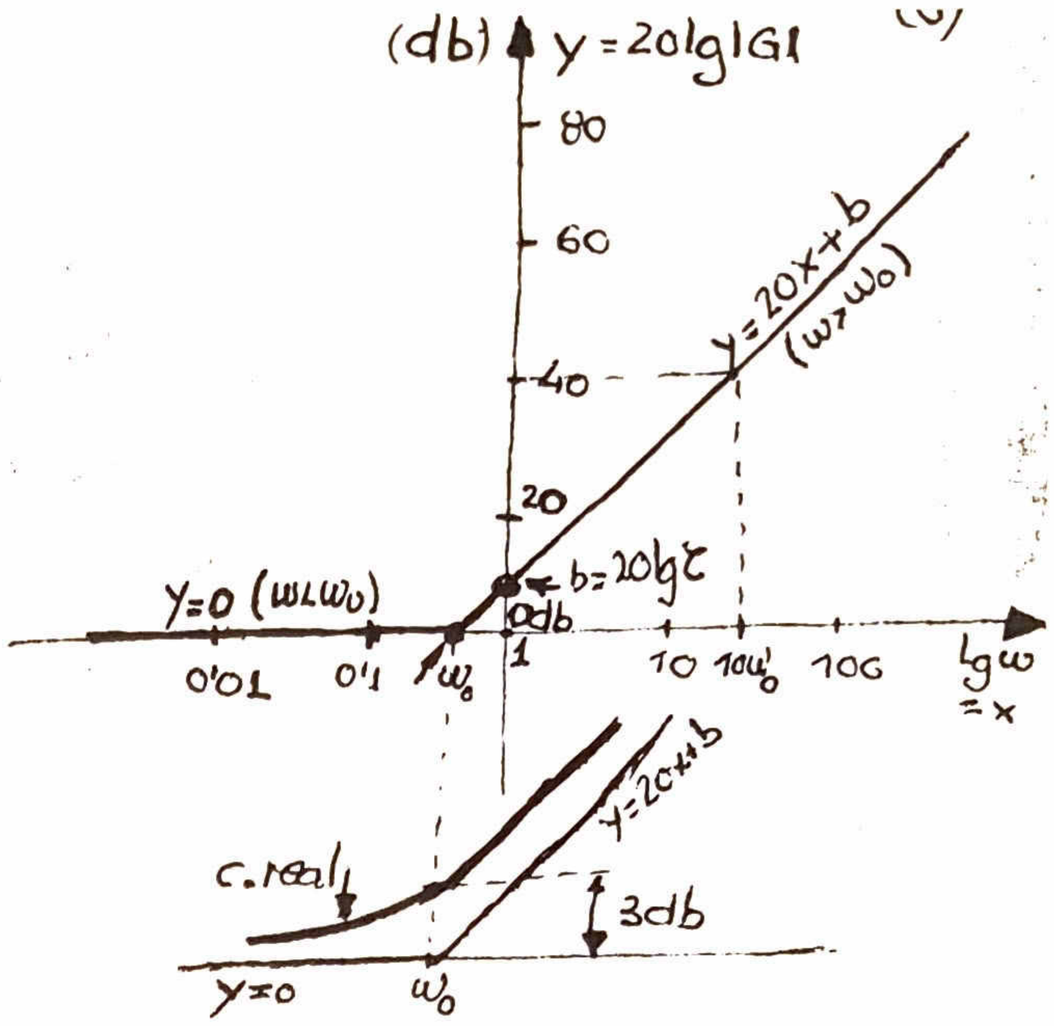
$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=20x+b \end{array}\right\} \begin{array}{l} 20x+b=0 \\ 20x=-b \end{array}$$

$$20\lg\omega_0 = -20\lg\tau = 20\lg\tau^{-1} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 1/\tau}$$



por tanto en el intervalo de estudio:

- $\omega < \omega_0 = 1/\tau$, actua $y = 0$
- $\omega > \omega_0 = 1/\tau$, actua $y = 20x + b$



Fase.

$$\varphi_G = \operatorname{arctg}(-\omega\tau)$$

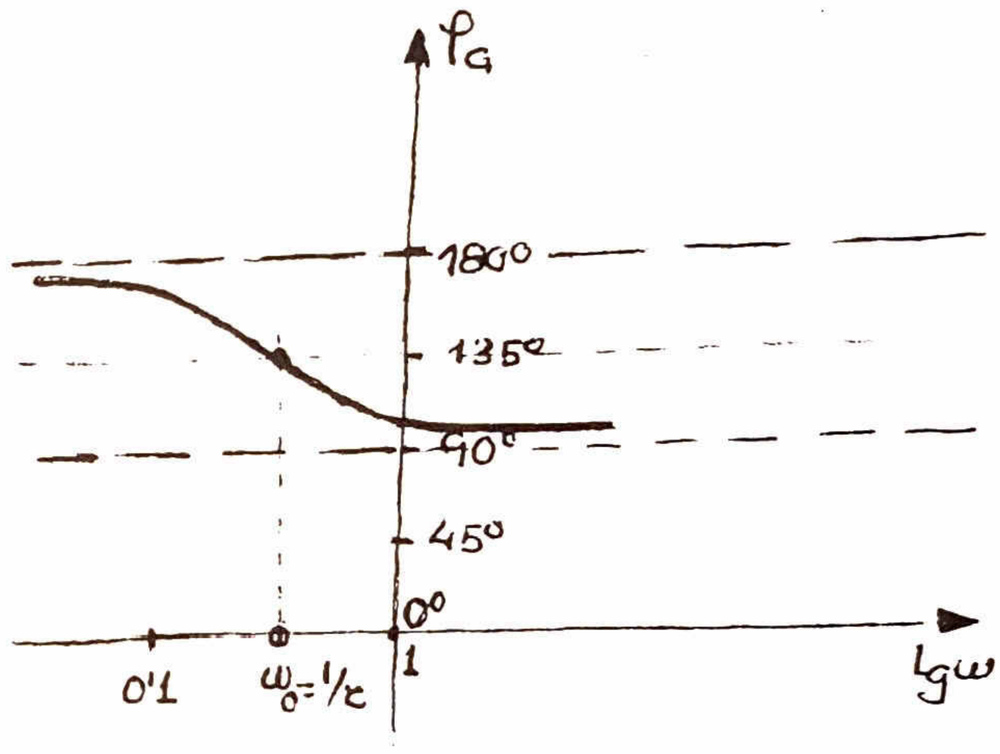
a) si $\omega \to 0 \Rightarrow \varphi_G = \operatorname{arctg}(-0) = 180°$

b) si $\omega \to \infty \Rightarrow (-\omega\tau) \to \infty \Rightarrow \varphi_G = \operatorname{arctg}(-\infty) = +90°$

c) si $\omega \geq \omega_0 = 1/\tau$ queda:

$\varphi_G = \operatorname{arctg}(-1) = (135°) = 135$

{comprende esto representando la fase por un vector cuyo seno es positivo y coseno igual pero negativo}



Función $T(s) = \dfrac{1}{(\tau s - 1)} \rightarrow T(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega\tau - 1)}$

ganancia.

$$|G| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

luego:

$$y = 20\lg|G| = -20\lg\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$$

a) si $\omega \to 0$, $(\omega\tau)^2 \to 0 \Rightarrow |G| \simeq 1$ por ello

$$y = 20\lg|G| = 20\lg 1 = 0\,db$$

b) si $\omega \to \infty \Rightarrow (\omega\tau)^2 \to \infty \Rightarrow |G| \simeq (\omega\tau)^{-1}$

$$y = 20\lg|G| = -20\lg\omega\tau = -20\lg\omega - 20\lg\tau$$

haciendo:

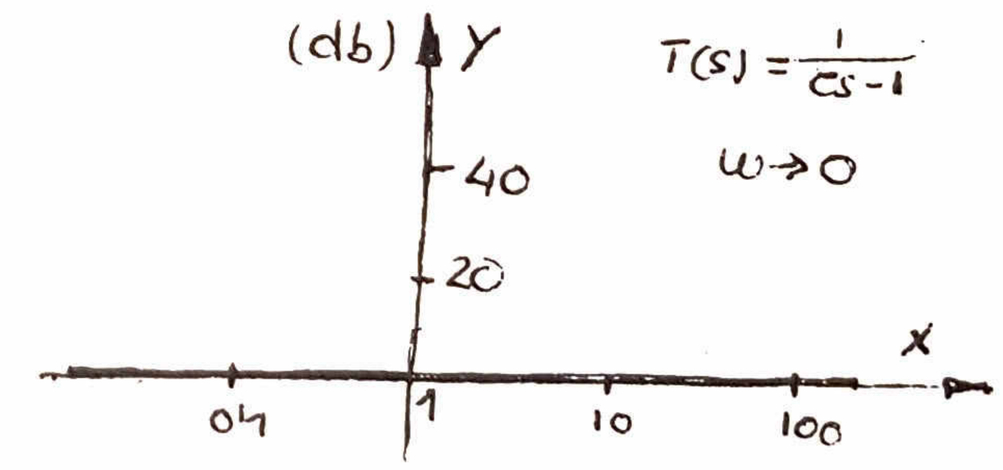
$$y = -20x - b \quad \begin{cases} m = -20\,db/dec. \\ x = \lg\omega \\ b = 20\lg\tau \end{cases}$$

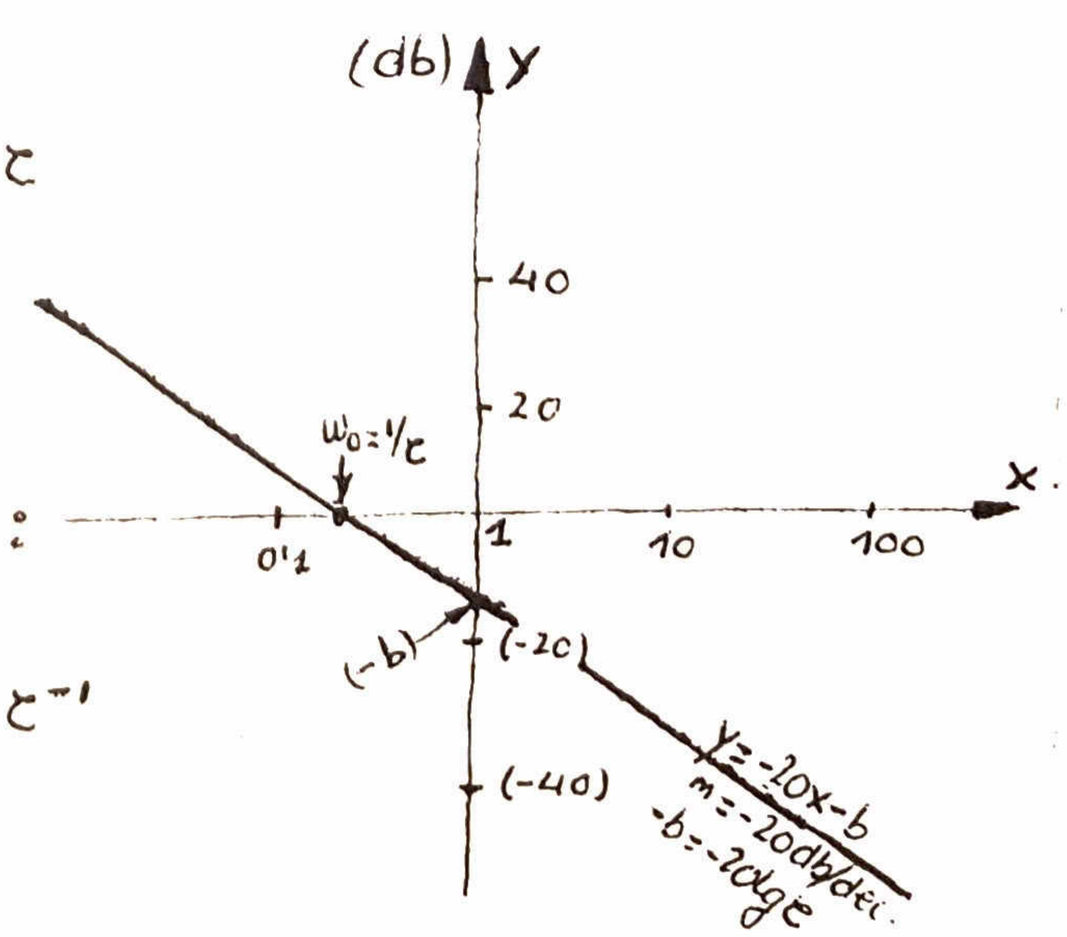
puntos de corte de ambas rectas:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -20x - b \end{cases} \quad -20x - b = 0 \quad 20x = -b$$

$$20\lg\omega_0 = -20\lg\tau \Rightarrow 20\lg\omega_0 = 20\lg\tau^{-1}$$

$$\boxed{\omega_0 = 1/\tau}$$





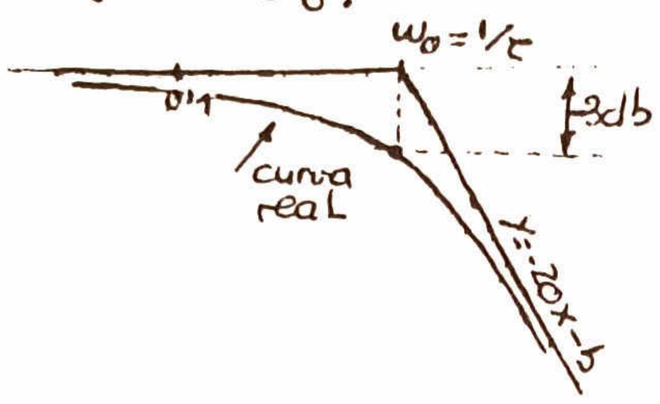
... La curva real de $20\lg|G|$ se puede considerar igual a la composición de ambas rectas. Son sus asíntotas.

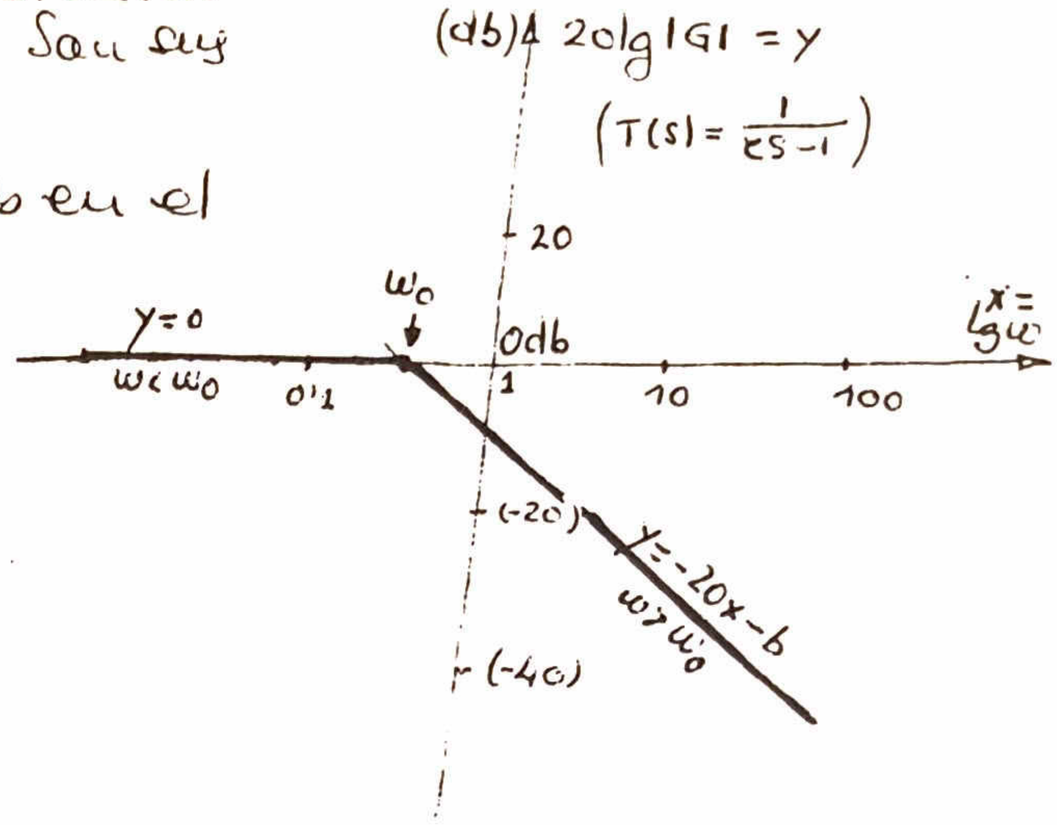
El punto que más se separa de ellas es en el codo $\omega = \omega_0$:

$$|G|_{\omega_0} = (\sqrt{2})^{-1}$$

$$20\lg|G|_{\omega_0} = -20\lg\sqrt{2} = \underline{\underline{-3db}}$$

por debajo de $\omega = \omega_0$.





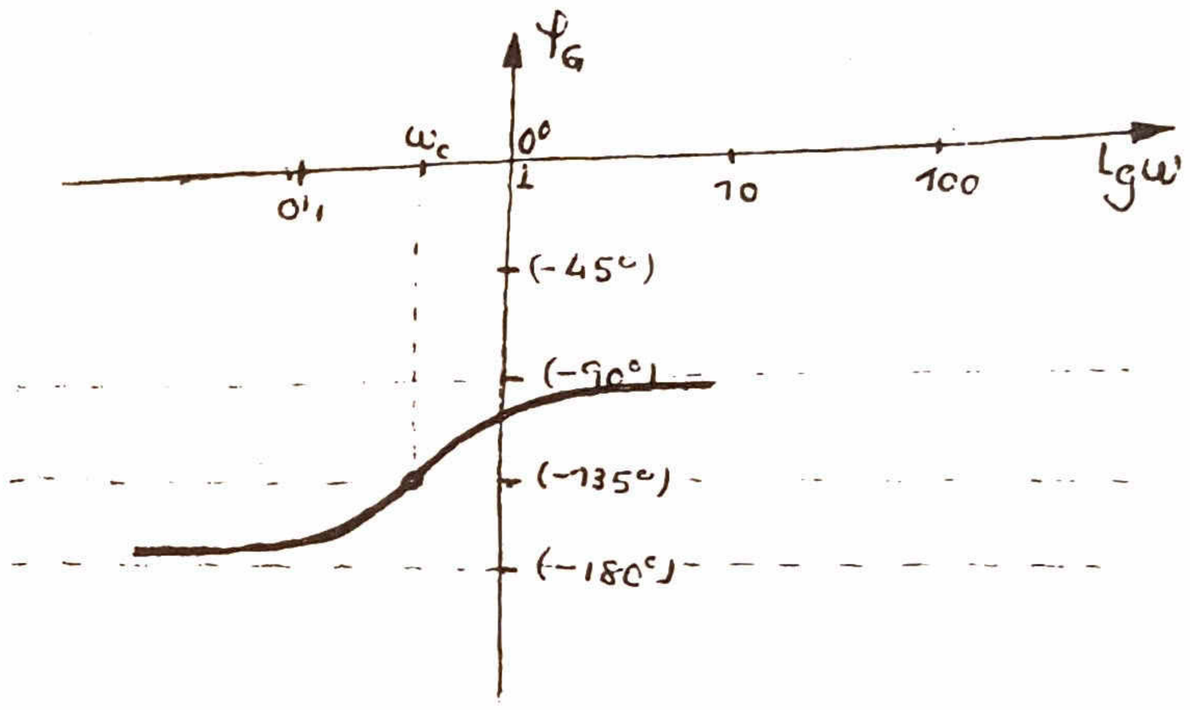
Fase

$$\varphi_G = -\operatorname{artg}\left(\frac{\omega\tau}{(-1)}\right) = -\operatorname{artg}(-\omega\tau)$$

a) $\omega \to 0 \Rightarrow \varphi_G = -\operatorname{artg}(-0) = -180°$

b) $\omega \to \infty \Rightarrow \varphi_G = -\operatorname{artg}(-\infty) = -90°$

c) $\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi_G = -\operatorname{artg}(-1) = -135$



Función $T(s) = (as^2 + bs + c)$

Sacando factor común a (c) :

$$T(s) = c\left(\frac{a}{c}s^2 + \frac{b}{c}s + 1\right) = c\,T'(s)$$

estudiaremos $T'(s) = \left(\frac{a}{c}s^2 + \frac{b}{c}s + 1\right)$ ya que (c) es una constante.

- Hacemos -

$$* \quad \frac{a}{c} = \frac{1}{\omega_0^2} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

$$* \quad \frac{b}{c} = \frac{2\delta}{\omega_0} \rightarrow \delta = \frac{\omega_0}{2}\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot b}{2c} = \frac{\sqrt{c}\cdot b}{2\sqrt{a}\cdot c} = \frac{\sqrt{c}\cdot b}{2\sqrt{a}\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}} =$$

$$\delta = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

- Quedando :

$$T'(s) = \frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\delta}{\omega_0}s + 1$$

$$T'(j\omega) = \frac{-\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega 2\delta}{\omega_0} + 1 = j\frac{\omega 2\delta}{\omega_0} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

- Raices de la ecuación -

$$\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\delta}{\omega_0}s + 1 = 0$$

$$s = \frac{-2\delta/\omega_0 \pm \sqrt{\left(\frac{2\delta}{\omega_0}\right)^2 - 4/\omega_0^2}}{\frac{2}{\omega_n^2}} = \frac{\frac{-2\delta}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0}\sqrt{\delta^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_n^2}} = -\frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}}{\frac{1}{\omega_0}}$$

por tanto:

$$S = \omega_0 \left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}\right) \quad \text{(raíces } S_1 \text{ y } S_2\text{)}$$

Caso (a).. Si $\delta > 1 \Rightarrow \delta^2 \gg 1 \Rightarrow \sqrt{\delta^2 - 1}$ real y las dos raíces son reales y

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \omega_0 \left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}\right) \\ S_2 &= \omega_0 \left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - 1}\right) \end{aligned}\right\} \text{reales.}$$

Entonces .. $T'(s) = \frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\delta}{\omega_0} s + 1 = \frac{1}{\omega_0^2}\left[(s - S_1)\cdot(s + S_2)\right] =$

$$= \frac{1}{\omega_0^2} S_1 S_2 \left(\frac{s}{S_1} - 1\right)\left(\frac{s}{S_2} - 1\right) = \frac{S_1 S_2}{\omega_0^2}\left(\frac{s}{S_1} - 1\right)\left(\frac{s}{S_1} - 1\right)$$

pero $S_1 S_2 = \omega_0^2\left[\delta^2 + \delta^2 + 1\right] = \omega_0^2$ entonces $\frac{S_1 S_2}{\omega_0^2} = 1$ por tanto:

$$T'(s) = \left(\frac{s}{S_1} - 1\right)\left(\frac{s}{S_2} - 1\right) = (\tau_1 s - 1)(\tau_2 s - 1)$$

donde: $\tau_1 = 1/S_1$ y $\tau_2 = 1/S_2$.

siendo por tanto $T'(s)$ una composición de términos de la forma $(\tau s - 1)$ ya estudiados.

Observaciones.. ω_0 estará situado en S_1 y S_2, siendo además: $\lg \omega_0 = \frac{\lg S_1 + \lg S_2}{2}$ osea, $\lg \omega_0$ es la media aritmética de $\lg S_1$ y $\lg S_2$, por tanto equidista de ambos.

En efecto..

$$S_1 S_2 = \omega_0^2$$

$$\lg S_1 \cdot S_2 = \lg \omega_0^2 \rightarrow \lg S_1 + \lg S_2 = 2 \lg \omega_0 \Rightarrow \lg \omega_0 = \frac{\lg S_1 + \lg S_2}{2}$$

Ganancia.. Será la composición de $(\tau_1 s - 1)$ y $(\tau_2 s - 1)$:

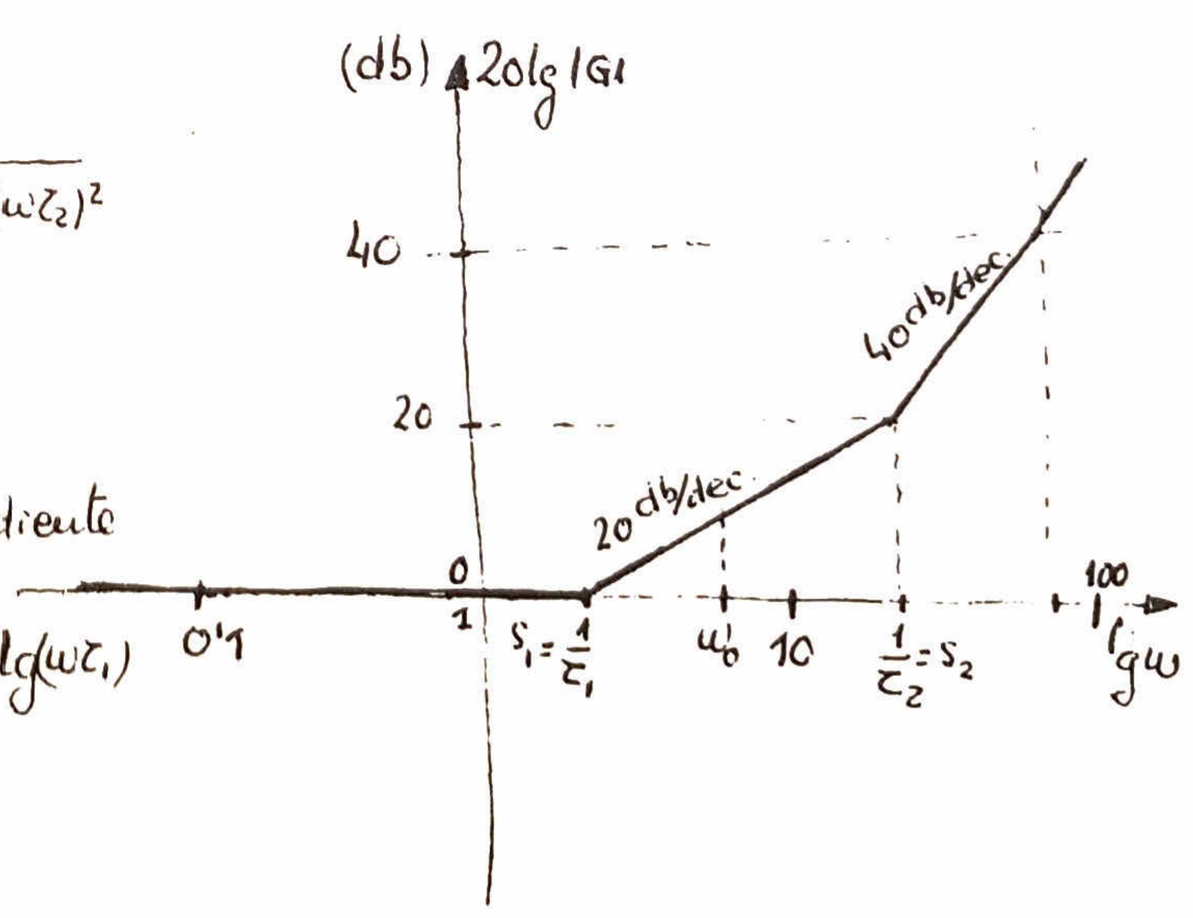
$$T(s) = \frac{1}{\omega_0^2} s + \frac{2\delta}{\omega_0} s + 1 \Big|_{\delta > 1} = \left(\frac{s}{S_1} - 1\right)\left(\frac{s}{S_2} - 1\right) = (\tau_1 s - 1)(\tau_2 s - 2)$$

~~[illegible]~~

$$|G| = |T(s)| = |T(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega\tau_1)^2} \cdot \sqrt{(1 + (\omega\tau_2)^2}$$

$$20 \lg |G| = 20 \lg \sqrt{1 + (\omega\tau_1)} + 20 \lg \sqrt{1 + (\omega\tau_2)^2}$$

- $\omega < \omega_{c_1} = 1/\tau_1 \Rightarrow |G| \simeq 0$
- $\omega_{c_1} < \omega < \omega_{c_2} = 1/\tau_2 \Rightarrow |G| \simeq 20 \lg (\omega\tau_1)$ pendiente de (+20db/decada)
- $\omega > \omega_{c_2} = 1/\tau_2 \Rightarrow |G| \simeq 20 \lg (\omega\tau_2) + 20 \lg (\omega\tau_1)$ pendiente (+40db/decada).

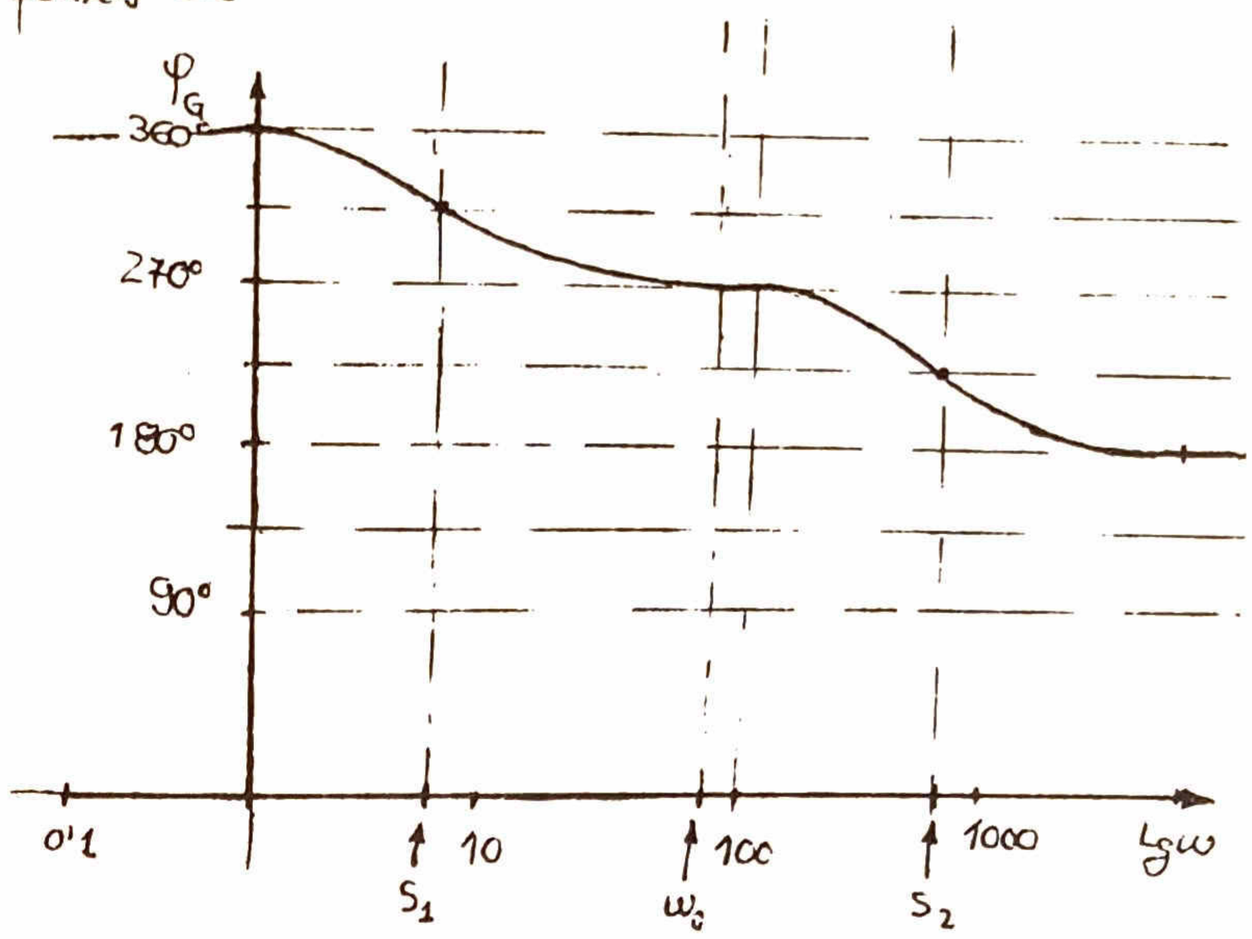


Fase.. La comparacion de las fases de cada término $(\tau_1 s-1)(\tau_2 s-1)$.

$$\varphi_a = \operatorname{artg}(-\omega\tau_1) + \operatorname{artg}(-\omega\tau_2)$$

- $\omega \to 0 \Rightarrow \varphi_G = \operatorname{artg}(-0) + \operatorname{artg}(-0) =$
  $= 180° + 180° = \underline{\underline{360°}}$

- $\omega = 1/\tau_1 \Rightarrow \varphi_G = \operatorname{artg}(-1) + \operatorname{artg}(-0) =$
  $\varphi_G = 360° - \operatorname{artg}(-1) = 360° - 45° = 315°$
  o' $\varphi_G = 135° + 180°$



- $\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi_G = 270°$

- $\omega > \omega_0$
  $\omega < \omega = 1/\tau_2$ $\Big\}$ $\varphi_G \Rightarrow 180° + 45° = 225°$

- $\omega = 1/\tau_2 \Rightarrow \varphi_G = 225°$

- $\omega > \omega_2 = 1/\tau_2 \Rightarrow \varphi_G \to 180°$ ya que al $\omega \to \infty \Rightarrow \varphi_G = \operatorname{artg}(-\infty) +$
  $+ \operatorname{artg}(-\infty) = 90° + 90° = 180°$.

Caso (b)

Si resulta que:

$$0 \leq \delta \leq 1 \Rightarrow \delta^2 \leq 1 \Rightarrow \delta^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow \sqrt{\delta^2-1} \text{ imaginario}$$

por tanto:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \omega_0(-\delta + \sqrt{\delta^2-1}) \\ S_2 &= \omega_0(-\delta - \sqrt{\delta^2-1}) \end{aligned}\right\} \text{ imaginarios (conjugados)}$$

siendo: $T(j\omega) = j\omega\frac{2\delta}{\omega_0} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)$

Ganancia..

a) si $\omega \to 0$ $\left\{\begin{array}{l} j\frac{\omega 2\delta}{\omega_0} \to 0 \\ \frac{\omega^2}{\omega_0} \to 0 \Rightarrow 1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{c} T(j\omega) = 0+1 \\ |G| = 1 \\ y = 20\lg|G| = \underline{\underline{0\,db.}} \end{array}$

b) si $\omega \to \infty$ $\left\{\begin{array}{l} j\omega\frac{2\delta}{\omega_0} \to \infty \\ \frac{\omega^2}{\omega^2} \to \infty \Rightarrow 1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \simeq -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} |\omega^2(-\frac{1}{\omega_0^2})| \gg |\omega(j\frac{2\delta}{\omega_0})| \Rightarrow \\ T(j\omega) \simeq -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \end{array}$

por tanto: $|G| \simeq \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$

osea que:

$$y = 20\lg|G| = 20\lg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 40(\lg\omega - \lg\omega_0) = 40\lg\omega - 40\lg\omega_0$$

haciendo: $\boxed{y = 40x - b}$ $\left\{\begin{array}{l} b = 40\lg\omega_0 \\ m = 40\,db/década \end{array}\right.$ $x = \lg\omega$

puntos de corte de esta recta:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=40x-b \end{array}\right\} \quad 40x-b=0 \quad 40x=b \quad \text{o sea:}$$

$$20\lg\omega = 20\lg\omega_0 \Rightarrow \boxed{\omega_c=\omega_0}$$

c) si $\omega=\omega_c=\omega_0$ $\left.\begin{array}{l} j^2\frac{\omega 2\delta}{\omega_0} = j^2 2\delta \\ \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)=1-1=0 \end{array}\right\} \rightarrow T(j\omega)=j^2 2\delta$

$$|G| = 2\delta$$

queda: $20\lg|G|_{\omega_0} = y = 20\lg 2\delta$, pudiendo ($\delta$) tomar valores infinitos entre el intervalo 0 a 1. $(0 \leq \delta \leq 1)$

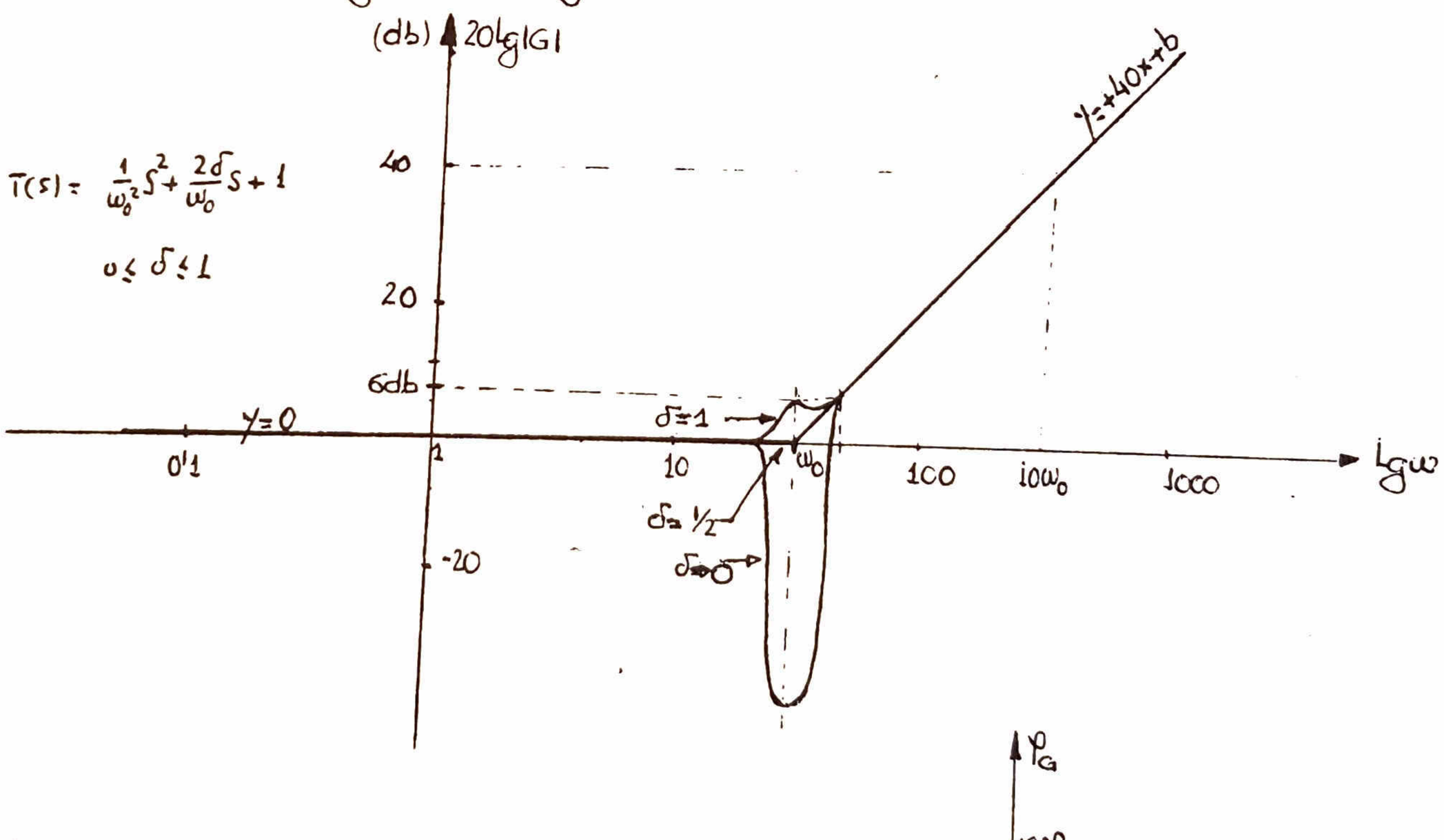
- Caso especial:

$$20\lg|G| = 20\lg 2\delta = 0 \Rightarrow \quad 2\delta = 1 \Rightarrow \quad \boxed{\delta = 1/2}$$

- Otros casos:

$\delta \to 0 \Rightarrow 20\lg|G| \leftrightarrows 20\lg 0 = -\infty db$; $\delta=0 \Rightarrow 20\lg|G| \Longrightarrow -\infty db.$

$\delta \geq 1 \Rightarrow 20\lg|G| = 20\lg 2 = 20 \cdot 0'3 = \underline{\underline{6db}}$



Fase

a) si $\omega \to 0 \Rightarrow T(j\omega) = 1$

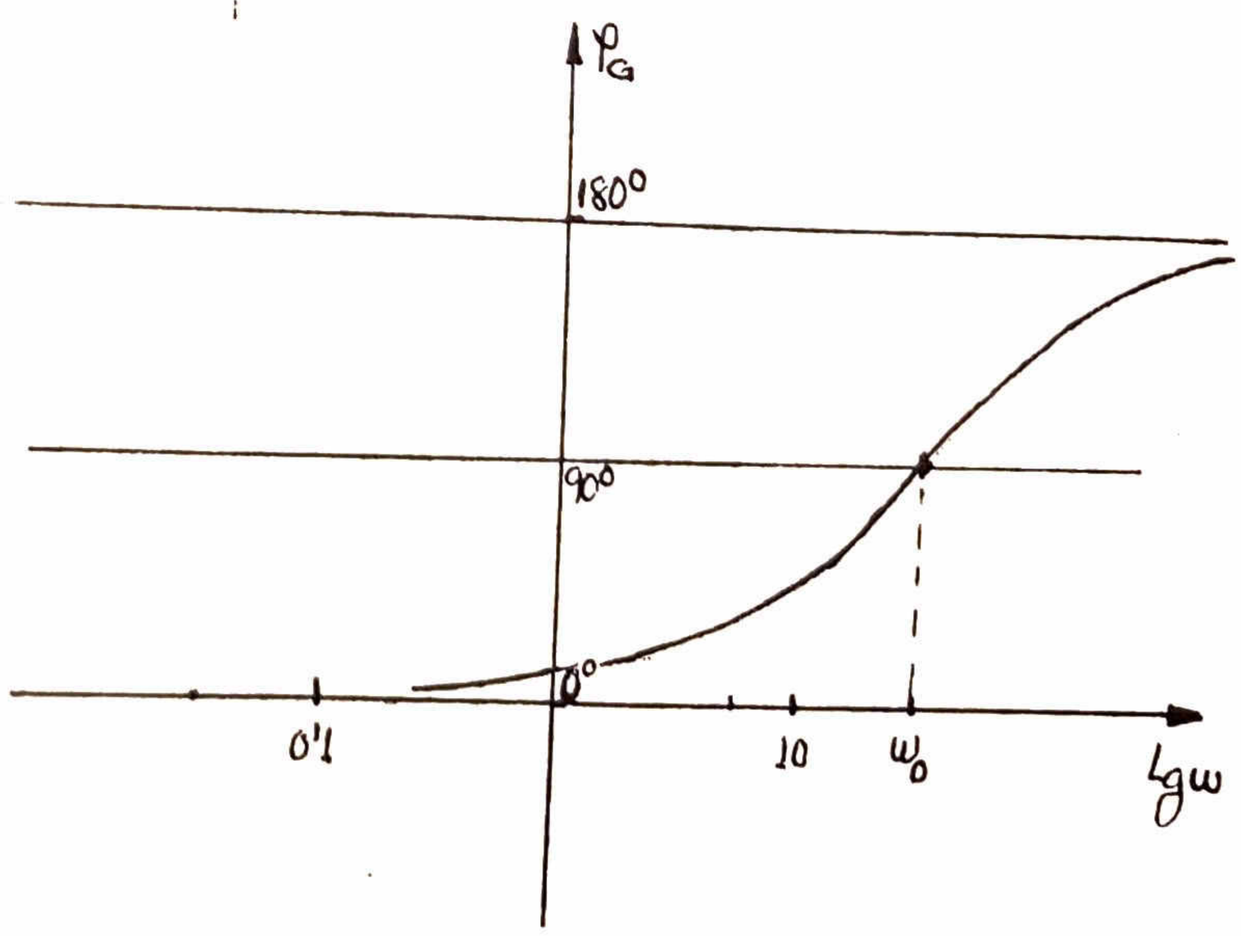
$$\varphi_G = 0^\circ$$

b) si $\omega \to \infty \Rightarrow T(j\omega) = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$

$$\varphi_G = 180^\circ$$

c) si $\omega = \omega_0 \Rightarrow T(j\omega) = j^2\delta$

$$\varphi_G = 90^\circ$$



Sacando factor comun a (c):

$$T(s) = \frac{1}{c\left(\frac{a}{c}s^2 + \frac{b}{c}s + 1\right)}$$

estudiaremos la función:

$$T'(s) = \frac{1}{\left(\frac{a}{c}s^2 + \frac{b}{c}s + 1\right)} \quad \text{ya que } c = cte$$

Haciendo:

* $\frac{a}{c} = \frac{1}{\omega_0^2} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}$
* $\frac{b}{c} = \frac{2\delta}{\omega_0} \rightarrow \delta = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$

Sustituyendo en la función -

$$T(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2\delta}{\omega_0}s + 1} \Rightarrow T(j\omega) = \frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0}2\delta + 1} = \frac{1}{j\omega\frac{2\delta}{\omega_0} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

a partir de aquí consideramos dos casos, según el valor de (δ).

Raices .. Serán dos raices s_1 y s_2:

$$\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2\delta}{\omega_0}s + 1 = 0$$

$$s = \omega_0\left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}\right)$$

1er caso. Si $\delta > 1 \Rightarrow \delta^2 >> 1 \Rightarrow \sqrt{\delta^2 - 1}$ será real. Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \omega_0\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}\right) \\ s_2 &= \omega_0\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - 1}\right) \end{aligned}\right\} \text{ reales.}$$

Entonces hacemos:

$$T(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2\delta}{\omega_0}s + 1} = \frac{1}{\omega_0^2(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{1}{\frac{s_1 s_2}{\omega_0^2}\left(\frac{s}{s_1} - 1\right)\left(\frac{s}{s_2} - s\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{s_1}s - 1\right)\left(\frac{s}{s_2} - 1\right)}$$

ya que $s_1 s_2 = \omega_0^2$. Por tanto.

$$T(s) = \frac{1}{\left(\frac{1}{s_1}s - 1\right)\left(\frac{1}{s_2}s - 1\right)} = \frac{1}{(\tau_1 s - 1)(\tau_2 s - 1)} \quad \text{donde} \begin{cases} \frac{1}{s_1} = \tau_1 \\ \frac{1}{\tau_2} = \tau_2 \end{cases}$$

que es una composición de términos de la forma:

$$T(s) = \frac{1}{(\tau s - 1)}$$

ya estudiados.

Observaciones

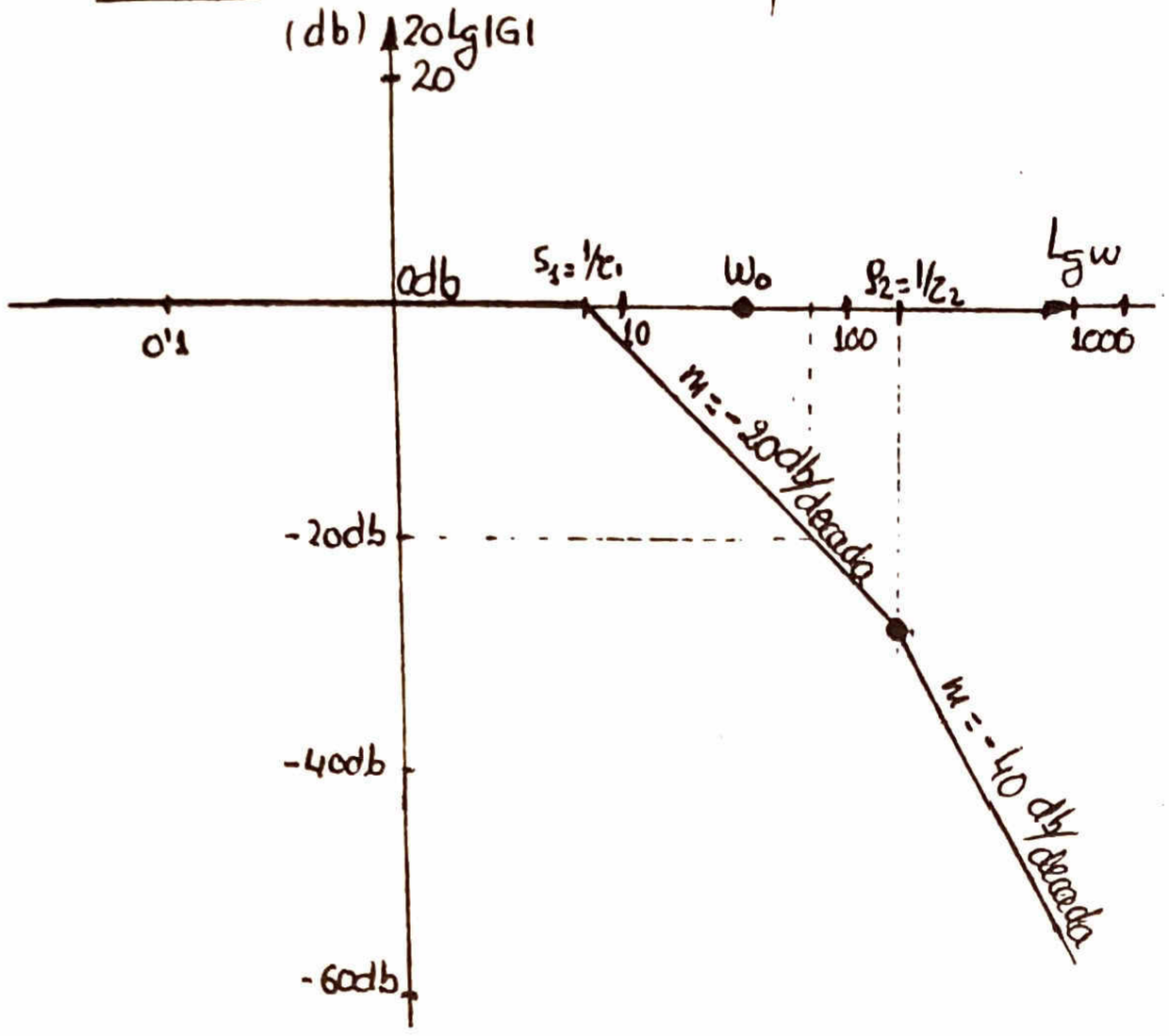
ω_0 está situado entre s_1 y s_2, siendo además $\lg \omega_0 = \frac{\lg s_1 + \lg s_2}{2}$ esto es que ω_0 es la media aritmética de $\lg s_1$ y $\lg s_2$ por tanto equidista de ambos. En efecto ya que si:

$$s_1 s_2 = \omega_0^2 \Rightarrow \lg s_1 + \lg s_2 = 2\lg \omega_0 \Rightarrow \lg \omega_0 = \frac{\lg s_1 + \lg s_2}{2}$$

Ganancia - Será la composición de los términos $\frac{1}{(\tau_1 s-1)}$ y $\frac{1}{(\tau_2 s-1)}$:

$$T(s)=\frac{1}{\left(\frac{1}{\omega_0^2}s^2+\frac{2\delta}{\omega_0}s+1\right)}$$

para $\delta > 1$



Fase. $\varphi_G = -\text{artg}(-\omega\tau_1) - \text{artg}(-\omega\tau_2)$

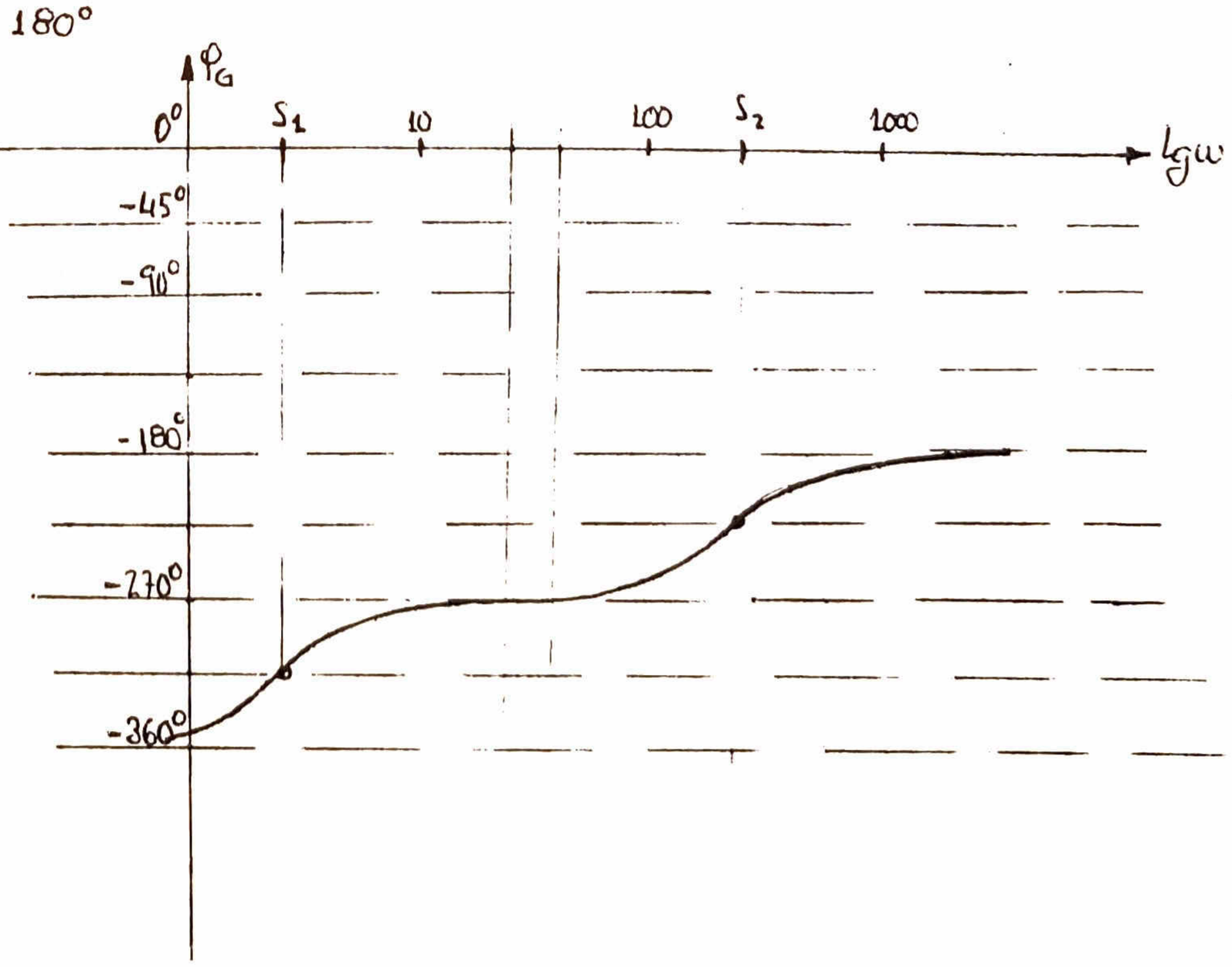
① $\omega \to 0 \Rightarrow \varphi_G = -360°$

② $\omega = \frac{1}{\tau_1} \Rightarrow \varphi_G = -360° + 45° = -315°$

③ $\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi_G = -270°$

④ $\omega = 1/\tau_2 \Rightarrow \varphi_G = -270° + 45° = -225°$

⑤ $\omega \to \infty \Rightarrow \varphi_G = -180°$



2° CASO .. Cuando $0 \leq \delta \leq 1 \Rightarrow \delta^2 << 1 \Rightarrow \sqrt{\delta^2-1}$ es imaginario. Por tanto

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \omega_0\left(-\delta+\sqrt{\delta^2-1}\right) \\ S_2 &= \omega_0\left(-\delta-\sqrt{\delta^2-1}\right) \end{aligned}\right\} \text{ imaginarios (conjugados).}$$

Siendo:

$$T(j\omega) = \frac{1}{j\omega\frac{2\delta}{\omega_0} + \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

Ganancia ..

a) si $\omega \to 0 \Rightarrow$ $\left\{\begin{aligned} &j\omega\frac{2\delta}{\omega_0} \to 0 \\ &\frac{\omega^2}{\omega_0} \to 0 \Rightarrow \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = 1 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} T(j\omega) &= 1/1 = 1 \\ |G| &= 1 \\ 20\lg|G| &= 20\cdot 0 = \underline{\underline{0db}} \\ &\text{osea } y = 0 \end{aligned}$

b) si $\omega \to \infty$ $\left\{\begin{aligned} &j\omega\frac{2\delta}{\omega_0} \to \infty \\ &\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \to \infty \Rightarrow \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \simeq -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} &\left|\omega^2\left(-\tfrac{1}{\omega_0^2}\right)\right| \gg \left|\omega\left(j\tfrac{2\delta}{\omega_0}\right)\right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow T(j\omega) \simeq \frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \simeq -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \end{aligned}$

Siendo: $|G| = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$, por tanto;

$20\lg|G| = 20\lg\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 40\lg\frac{\omega_0}{\omega} = 40(\lg\omega_0 - \lg\omega) = 40\lg\omega_0 - 40\lg\omega$

$= -40\lg\omega + 40\lg\omega_0$; osea:

$\boxed{y = -40x + b}$ $\left\{\begin{aligned} &m = -40\,db/década \text{ (pendiente)} \\ &b = 40\lg\omega_0 \\ &x = \lg\omega \end{aligned}\right.$

Puntos de corte:

$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ y &= -40x+b \end{aligned}\right\}$ $-40x + b = 0$, $40x = b$ $\Rightarrow$ $40\lg\omega_c = 40\lg\omega_0$

$\boxed{\omega_c = \omega_0}$

c) $\omega = \omega_c = \omega_0 \Rightarrow$ $\left\{\begin{aligned} &j\frac{\omega 2\delta}{\omega_0} = j2\delta \\ &\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 \Rightarrow \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = 0 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} T(j\omega) &= \frac{1}{j2\delta} = -j\frac{1}{2\delta} \\ |G| &= \frac{1}{2\delta} \end{aligned}$

$20\lg|G| = -20\lg 2\delta$ se pueden tomar infinitos valores dentro del intervalo de 0 a 1 $(0 \leq \delta \leq 1)$

* Casos especiales ..

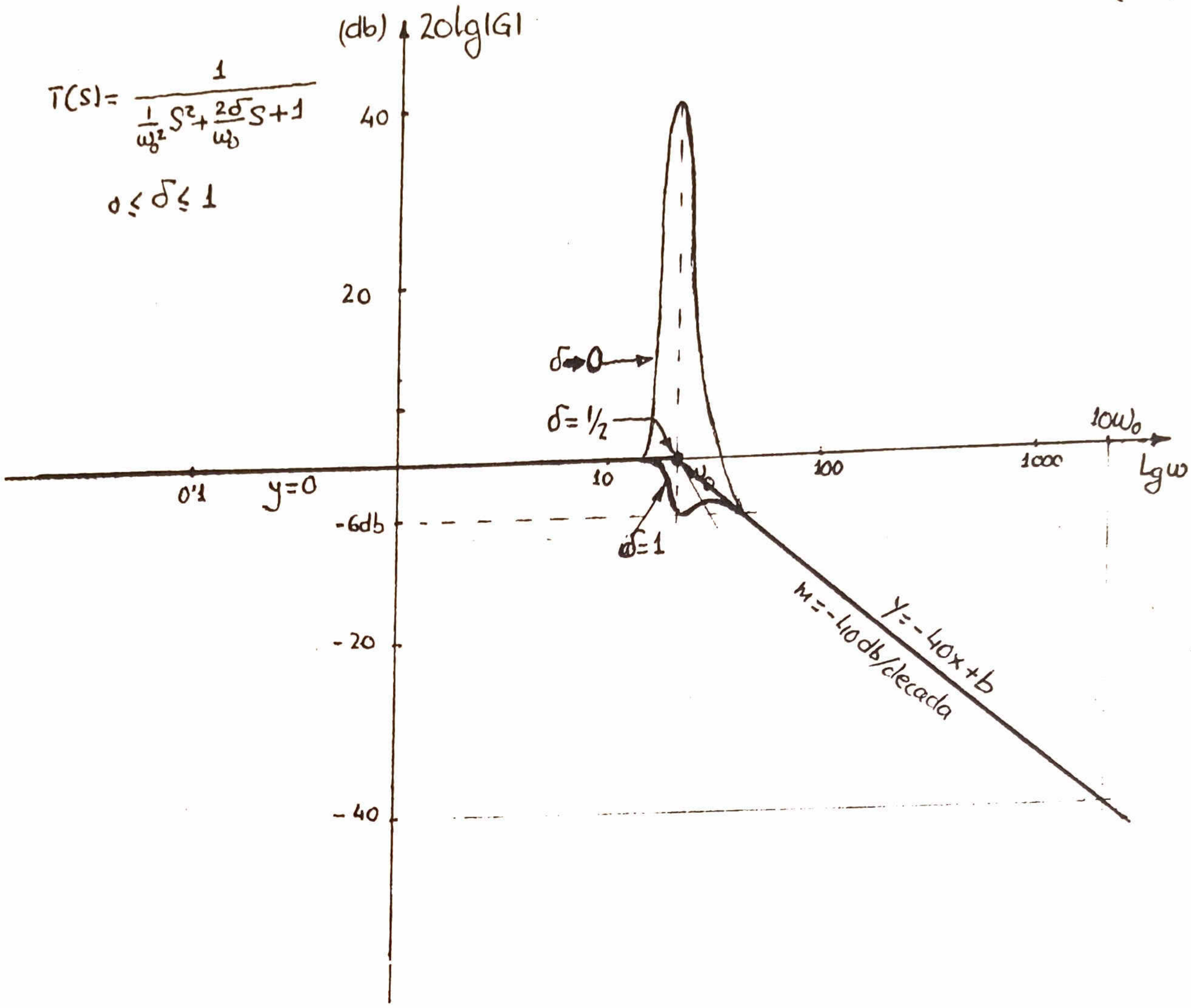
1) $20\lg|G| = -20\lg 2\delta = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \quad 2\delta = 1 \Rightarrow \boxed{\delta = 1/2}$

2) $\delta \to 0 \Rightarrow -20\lg 2\delta \simeq 20\lg 0 = -(-\infty)db = \underline{\underline{\infty db}}$

3) $\delta = 1 \Rightarrow -20\lg 2\delta = -20\lg 2 = -20\cdot 0'30 = -\underline{\underline{6db}}$

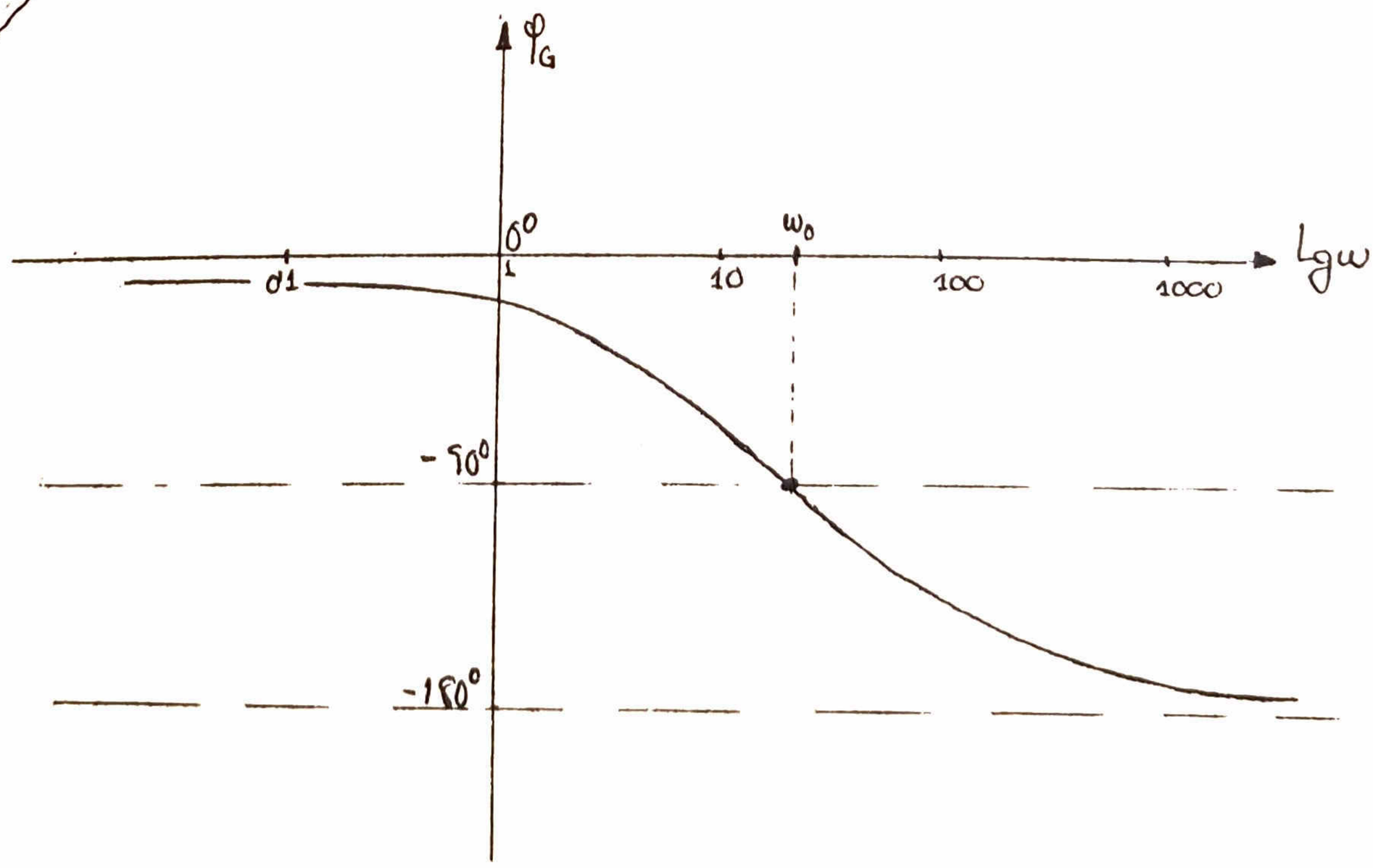
$$T(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2\delta}{\omega_0}s + 1}$$

$$0 \leq \delta \leq 1$$



Fase =.

a) si $\omega \to 0 \Rightarrow T(j\omega) = 1 \Rightarrow \varphi_G = 0°$

b) si $\omega \to \infty \Rightarrow T(j\omega) = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow \varphi_G = -180°$

c) si $\omega = \omega_0 \Rightarrow T(j\omega) = -j^\circ \frac{1}{2\delta} \Rightarrow \varphi_G = -90°$